14 ottobre 2011

1. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamone il polinomio caratteristico

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)^2$$

Abbiamo allora un aurovalore $\lambda = -2$ con molteplicità algebrica 1 ed un autovalore $\lambda - 4$ con molteplicità algebrica 2.

Studiamo $E(-2)$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(abbiamo indicato la sua forma ridotta a scala). Questa matrice ha rango 2. Risolviamo il sitema corrispondente alla forma a scala:

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene l'insieme delle soluzioni

$$E = (-2) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \}$$

Questo sottospazio ha dimensione 1: la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1.

Studiamo $E(4)$. La matrice è

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(abbiamo indicato la sua forma ridotta a scala). Questa matrice ha rango 2. Risolviamo il sitema corrispondente alla forma a scala:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene l'insieme delle soluzioni

$$E = (4) = \{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \}$$

Questo sottospazio ha dimensione 1: la molteplicità geometrica dell'autovalore è 1.

Da quanto precede risulta che non è possibile determinare tre autovettori della matrice data che siano linearmente indipendenti.

Quindi la matrice A non è diagonalizzabile.

2. Consideriamo la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & * \\ 1 & -1 & * \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix}$$

Determinare dei numeri da sostituire al posto degli asterischi in modo da ottenere una matrice invertibile.

Soluzione: È sufficiente trovare dei numeri in modo che il determinante sia diverso da zero. Osserviamo ad esempio che il minore $Q(2,3|1,2) \neq 0$. Se scegliamo un numero non nullo, ad esempio 1, in posizione $(1,3)$ e mettiamo degli zeri ai posti $(2,3)$ e $(3,3)$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha deteminante 2 ed è dunque invertibile.

3. Calcolare $Q^{-1}AQ$ dove A e Q sono le matrici dei due esercizi precedenti. Interpretare il risultato.

4. Se A è la matrice dell'esercizio 1 e $c_A(x)$ indica il suo polinomio caratteristico, verificare il Teorema di Cayley-Hamilton in questo caso.

5. Sfruttare l'esercizio 4 per calcolare A^{-1} e A^3 per A dell'esercizio 1.

6. Per la matrice A del punto 1, è possibile trovare un polinomio $p(x)$ di grado minore di 3 con la proprietà che $p(A) = 0$?