17 ottobre 2011

1. Per le matrici seguenti calcolare il rango per minori, il rango per pivot, il rango per righe ed il rango per colonne. Verificare che si ottiene sempre lo stesso numero. Determinare inoltre una base per lo spazio delle righe ed una per lo spazio delle colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Sono probabilmente conosciute già dalla scuola le successioni (o progressioni) geometriche. Esse sono delle successioni determinate dal primo elemento: successioni che soddisfano

$$\begin{cases} s_0 = a \\ s_{n+1} = r s_n \end{cases}$$

Si prova facilmente per induzione che $s_n = r^n a$: L'identità da tenere presente è $r^{n+1}a = r(r^n)a$.

Si tratta di una successione geometrica di ragione r.

3. Diremo che una successione è di tipo Fibonacci se

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$$

Proposizione. *L'insieme S delle successioni di tipo Fibonacci è uno spazio vettoriale di dimensione 2.*

Dimostrazione. Dette $\{s_n\}, \{t_n\}$ due elementi di S, occorre verificare che $\{s_n + t_n\} \in S$ e questo si verifica facilmente in quanto: $s_n + t_n = (s_{n-1} + t_{n-1}) + (s_{n-2} + t_{n-2})$. Si deve anche verificare che $\{cs_n\}$, $c \in \mathbb{R}$ è ancora in S: $cs_n = cs_{n-1} + cs_{n-2}$. Inoltre la successione tutta nulla è una successione in S. Dimostriamo ora che

$$\{f_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$$

e la successione

$$\{g_n\} = \{1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots\}$$

costituiscono una base di S. Infatti, esse sono indipendenti:

$$af_n + bg_n = 0, a, b \in \mathbb{R}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a = b = 0$. Inoltre, esse generano. Sia infatti $\{s_n\}$ una successione di tipo Fibonacci. Supponiamo che $s_0 = a, s_1 = b$ allora $s_2 = a + b$, $s_3 = a + 2b$, $s_4 = 2a + 3b$, e così via. I primi due valori determinano il resto della successione. Si vede allora che $s_n = af_n + bg_n$.

Visto questo e visto quanto detto al punto 1, può essere interessante domandarsi se ci siano successioni geometriche tra quelle di tipo Fibonacci. Supponiamo quindi di avere una successione geometrica

$$a, ar, ar^2, ar^3, \cdots$$

e supponiamo che sia di Fibonacci: $ar^2 = ar + a$. A meno che a non sia zero, nel qual caso abbiamo la successione nulla, troviamo la relazione che deve soddisfare r: $r^2 - r - 1 = 0$. Si scopre così che le sole successioni geometriche che sono anche successioni di Fibonacci sono quelle due che hanno come ragione $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Essendo queste due successioni linearmente indipendenti, si può pensare di usarle come base dello spazio vettoriale S. Sarà a questo punto importante conoscere le coordinate di una generica successione di Fibonacci espressa in questa base.

Supposto $s_0 = a$ e $s_1 = b$ si ha $s_n = c_1\phi^n + c_2\psi^n$. Abbiamo allora il sistema

$$\begin{cases} s_0 = c_1 + c_2 \\ s_1 = c_1\phi + c_2\psi \end{cases}$$

Rioslvendo si trova

$$c_1 = \frac{b - a\phi}{\phi - \psi}, \quad c_2 = \frac{b - a\phi}{\phi - \psi}$$

ovvero, ricordando che $\phi - \psi = \sqrt{5}$

$$c_1 = \frac{b - a\phi}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{b - a\phi}{-\sqrt{5}}$$

In particolare, per la successione di Fibonacci vera e propia in cui $a = 0, b = 1$ si ha la Formula di Binet:

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi}$$

4. Studiare le successioni di numeri naturali che si ottengono con le seguenti regole: dato un intero naturale a_n prendiamo come a_{n+1} la metà di a_n se a_n è pari, altrimenti, se a_n è dispari, moltiplichiamo a_n per 3 e aggiungiamo 1 per ottenere a_{n+1}. Verificare in qualche caso semplice che dopo un numero finito di passi si ottiene come risultato 1. Al momento non si sa se questo accade per qualunque valore iniziale delle successione. (Congettura di Collatz).

5. A scuola vengono via via introdotti diversi tipi di numeri: i naturali, gli interi relativi, i razionali ed infine gli irrazionali. Tutti questi costituiscono l'insieme dei cosiddetti numeri reali $\mathbb{R}$. Accade a volte che, risolvendo un'equazione di secondo grado, se $\Delta < 0$ allora le soluzioni non sono reali. Spesso se ciò accade le soluzioni si scartano "non avendo senso fisico". La situazione cambia al momento di risolvere le equazioni algebriche di terzo grado, per le quali esiste una formula risolutiva dovuta a Tartaglia (Niccolò Fontana, detto il Tartaglia, 1499-1557) come segue: si verifica che una equazione di terzo grado si può sempre ridurre nella forma

$$x^3 + px + q = 0$$

e la soluzione è allora data da

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}}$$

dove $D = -4p^3 - 27q^2$. Applicando questa formula all'equazione

$$x^3 = 63x + 162$$

Otteniamo l'espressione

$$x = \sqrt[3]{81 + \sqrt{-2700}} + \sqrt[3]{81 - \sqrt{-2700}}$$

ossia

$$x = \sqrt[3]{81 + 30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81 - 30\sqrt{-3}}$$

Continuando ad ignorare il significato della radice quadrata di un numero negativo, calcoliamo comunque le radici cubiche in questa espressione.

Si può verificare che

$$(-3 \pm 2\sqrt{-3})^3 = 81 \pm 30\sqrt{-3}$$

$$(\frac{1}{2}(9 \pm \sqrt{-3})^3 = 81 \pm 30\sqrt{-3}$$

$$(\frac{1}{2}(-3 \mp 5\sqrt{-3})^3 = 81 \pm 30\sqrt{-3}$$

e dunque sostituendo nella formula

$$x = -3 + 2\sqrt{-3} + (-3 - 2\sqrt{-3}) = -6$$

$$x = (\frac{1}{2}(9 + \sqrt{-3}) + (\frac{1}{2}(9 - \sqrt{-3}) = 9$$

$$x = (\frac{1}{2}(-3 - 5\sqrt{-3}) + (\frac{1}{2}(-3 + 5\sqrt{-3}) = -3$$

Abbiamo così trovato tre soluzioni reali dell'equazione data pur dovendo "passare" attraverso il calcolo con radici quadrate di numeri negativi. *"Così progredisce la sottigliezza aritmetica il cui fine [...] è tanto raffinato quanto inutile."* **Cardano.**(1501-1576).

6. Se si opera con questi numeri "assurdi" acriticamente si possono ottenere delle conseguenze disastrose. Ad esempio, cosa c'è di sbagliato nella seguente dimostrazione che $-1 = 1$?

$$-1 = (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Oppure:

$$\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6$$

ma anche

$$\sqrt{-4}\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\sqrt{4}\sqrt{-1}\sqrt{9} = (\sqrt{-1})^2\sqrt{36} = (-1)(6) = -6$$

dunque $6 = -6$??

7. Per assicurarsi che i paradossi non sorgano quando usiamo $\sqrt{-1}$, definiamo un nuovo "numero" $i = (0, 1)$ e nell'insieme delle coppie ordinate di numeri reali definiamo due operazioni:

(1) (Addizione) $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$;
(2) (Moltiplicazione) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

In tal modo abbiamo definito delle operazioni sulle coppie di numeri reali che possiamo, come si fa spesso, identificare con i punti di un piano (dove si sia supposto fissato un sistema di riferimento). L'asse delle x allora lo possiamo identificare con l'insieme dei numeri reali. Possiamo allora calcolare che con le regole appena date:

$$(0,1) \cdot (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0)$$

avendo identificato il punto $(-1,0)$ con il numero reale -1. Quanto visto equivale a dimostrare che il nuovo numero $(0,1)$ è una radice quadrata di -1.

Osserviamo che un qualunque numero del nuovo tipo (a,b) si può scrivere nel modo seguente

$$(a,b) = (a,0) + (0,1)(b,0) = (a,0) + (0,b)$$

Infatti, $(0,1)(b,0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (0,b)$

Una volta identificato un numero reale a con la coppia $(a,0)$ possiamo allora scrivere $(a,b) = a + ib$. a si dice la parte reale , b si dice la parte immaginaria del numero complesso $a + ib$. Dopo aver verificato che l'insieme delle coppie di numeri reali con queste regole possiede una struttura di **campo** è possibile operare sui numeri complessi con le regole usuali dell'algebra ricordando che $i^2 = -1$.

8. Disegnare su un grafico cartesiano i punti corrispondenti ai numeri $z = 2+3i$, $\frac{1}{z}$, z^2, $-2z$, $\bar{z}$ (il coniugato di z).

9. Scrivere il numero $\frac{3+2i}{2+5i}$ nella forma $a + ib$.

10. Disegnare su un grafico cartesiano l'insieme dei numeri z tali che $|z| = |2+3i|$.

11. Risolvere l'equazione $z^2 - iz + (1+3i) = 0$.

12. Calcolare $|\frac{2-3i}{2+3i}|$

13. Calcolare $(1+i)^{10}$.