

18 ottobre 2011

1. Per le matrici seguenti calcolare il rango per minori, il rango per pivot, il rango per righe ed il rango per colonne. Verificare che si ottiene sempre lo stesso numero. Determinare inoltre una base per lo spazio delle righe ed una per lo spazio delle colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il rango per minori: Si vede che il minore

$$A(2, 3|1, 2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

e non ci possono chiaramente essere minori di ordine più grande per cui il rango per minori è 2.

Rango per pivot: Svolgiamo la riduzione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

da cui si vede che il rango per pivot è 2.

Rango per righe: occorre calcolare la dimensione dello spazio delle righe $R(A)$ definito come lo spazio generato dalle righe di A :

$$R(A) = \langle (1, 1, 1), (2, 2, -3) \rangle$$

Essendo le due righe dei generatori per costruzione, dobbiamo solo verificare che esse siano linearmente indipendenti; ma ciò è ovvio in quanto esse non sono proporzionali. Le due righe costituiscono dunque una base e quindi la dimensione cercata è 2.

Rango per colonne: occorre calcolare la dimensione dello spazio delle colonne $C(A)$ definito come lo spazio generato dalle colonne di A :

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Stavolta abbiamo tre generatori. Applichiamo la definizione di indipendenza lineare. Consideriamo la combinazione lineare

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e vediamo se è possibile oppure no avere dei coefficienti a, b, c non tutti nulli che soddisfino questa relazione.

Si tratta quindi di studiare il SLO

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni possono essere scritte come segue:

$$\begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ciò significa, ad esempio, che possiamo scrivere la combinazione lineare

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per una qualunque scelta di $t \neq 0$ che quindi non ha i coefficienti tutti nulli. Cosicché la dimensione di $C(A)$ non può essere 3. Deve pertanto essere 2 in quanto due colonne non proporzionali evidentemente ci sono.

Quanto precede ci fa capire, come indicato dal teorema, lo strettissimo legame tra questi quattro concetti a priori distinti. Si capisce inoltre che se oltre alla dimensione vogliamo trovare una base esplicita per $R(A)$ oppure $C(A)$ dobbiamo lavorare con maggiore accuratezza in generale.

Svolgiamo l'esercizio per la matrice B .

Rango per minori. Il minore di ordine 2, $B(1, 2|2, 3)$, è non nullo. Consideriamo i suoi orlati:

$$B(1, 2, 3|1, 2, 3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0; \quad B(1, 2, 3|2, 3, 4) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Possiamo allora concludere che il rango per minori di questa matrice è 2.

Rango per pivot.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui il rango per pivot è 2.

Rango per righe.

$$a(1, -1, 3, -2) + b(2, -2, 2, -1) + c(-1, 1, 5, -4) = (0, 0, 0, 0)$$

cioè

$$\begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \\ 3a + 2b + 5c = 0 \\ -2a - b - 4c = 0 \end{cases}$$

Riolvendo questo SLO si vede che ci sono soluzioni non nulle. Ciò significa che i tre vettori sono linearmente dipendenti. Poiché evidentemente ci sono due righe non proporzionali, è chiaro che la dimensione di $R(B)$ è 2.

Rango per colonne. Equivale a studiare il SLO

$$\begin{cases} a - b + 3c - 2d = 0 \\ 2a - 2b + 2c - d = 0 \\ -a + b + 5c - 4d = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che la matrice dei coefficienti è proprio la matrice B (nel caso delle righe avevamo la trasposta di B). Riducendo per righe come abbiamo fatto sopra si vede chiaramente che il sistema ammette ∞^2 soluzioni e che due soluzioni base sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

che, incidentalmente, sono la prima e la terza colonna, cioè proprio le colonne dove abbiamo trovato i pivot. Dunque il rango per colonne è ancora 2.

2. Calcolare una base e la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Per quanto visto sopra, questo problema si può risolvere prendendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \end{pmatrix}$$

Riducendo a gradini si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la dimensione è 2. Una base si trova prendendo le colonne corrispondenti ai pivot:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

8. Disegnare su un grafico cartesiano i punti corrispondenti ai numeri $z = 2 + 3i$, $\frac{1}{z}$, z^2 , $-2z$, $\bar{z}$ (il coniugato di z). Per la soluzione vedere il foglio dinamico “Numeri Complessi 1” nella pagina del diario delle lezioni.

9. Scrivere il numero $\frac{3+2i}{2+5i}$ nella forma $a + ib$.

Soluzione

$$\frac{3+2i}{2+5i} = \frac{(3+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{16-11i}{29}$$

10. Disegnare su un grafico cartesiano l'insieme dei numeri z tali che $|z| = |2+3i|$.

Soluzione Il modulo di $2+3i$ è $\sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. L'insieme dei numeri aventi modulo uguale a questo formano una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{13}$, in altre parole $x^2 + y^2 = 13$.

11. Risolvere l'equazione $z^2 - iz + (1+3i) = 0$.

Soluzione La formula per la soluzione delle equazioni di secondo grado vale anche in questo caso. Il motivo è che la tecnica di risoluzione mediante la quale si ottiene la formula, e cioè "il completamento del quadrato" è una tecnica che vale anche in questo caso come si vede facilmente. La formula ci dà:

$$z = \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{i^2 - 4(1+3i)}) = \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{-5-12i})$$

Ovviamente il Δ è un numero complesso in questo caso e dobbiamo calcolarne la radice quadrata. Questa si può calcolare con la formula di DeMoivre. Qui però procediamo in maniera più elementare.

Cerchiamo di determinare un numero $w = x+iy$ tale che $w^2 = -5-12i$. Abbiamo dunque $w^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2x(iy) - y^2$ confrontando abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases}$$

Ricaviamo dalla seconda $y = -\frac{6}{x}$ e sostituiamo nella prima

$$x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \iff x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

Ricordiamoci che la x che cerchiamo è un numero **reale**. Questa ultima equazione è biquadratica e si fattorizza in $(x^2 - 4)(x^2 + 9)$. Dunque le soluzioni reali sono $x = \pm 2$, di conseguenza $y = \mp 3$ e dunque $w = 2 - 3i$ e $w = -2 + 3i$. Possiamo dunque concludere che

$$z = \frac{1}{2}(i \pm (2 - 3i))$$

Le soluzioni sono dunque $1 - i$ e $-1 + 2i$.

12. Calcolare $\left| \frac{2-3i}{2+3i} \right|$

Soluzione

$$\begin{aligned} \left| \frac{2-3i}{2+3i} \right| &= \sqrt{\left| \frac{(2-3i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \right|} = \sqrt{\left| \frac{-5-12i}{13} \right|} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{-5}{13} \right)^2 + \left(\frac{-12}{13} \right)^2} = \frac{\sqrt{25+144}}{13} = \frac{169}{13} = 1 \end{aligned}$$

In effetti è un fatto generale che $|z| = |\bar{z}|$ e quindi $|\frac{z}{\bar{z}}| = 1$ qualunque sia z non nullo.

13. Calcolare $(1+i)^{10}$.

Soluzione Calcolare le potenze di un numero complesso è molto più agevole usando la forma trigonometrica o polare del numero. Svolgiamola secondo le potenze del binomio

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \sum_{h=0}^{10} \binom{10}{h} i^h = \\ &= 1 + 10i + 45i^2 + 120i^3 + 210i^4 + 252i^5 + 210i^6 + 120i^7 + 45i^8 + 10i^9 + i^{10}\end{aligned}$$

Le potenze di i hanno periodo 4, sono cioè del tipo

$$1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots$$

l'espressione diventa quindi

$$\begin{aligned}1 + 10i - 45 - 120i + \\ + 210 + 252i - 210 - 120i + \\ + 45 + 10i - 1\end{aligned}$$

e sommando

$$256 + 272i - 256 - 240i = 32i$$

È chiaro che questo modo non è molto pratico quando l'esponente è molto grande e certamente se l'esponente non è intero.

Usiamo la forma trigonometrica del numero: $1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ allora $(1+i)^{10} = 2^5(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2}) = 32i$