20 ottobre 2011

1. Area del triangolo Supponiamo di avere un triangolo di lati a, b, c. La trigonometria ci permette di calcolare l'altezza del triangolo: $h = b \sin\alpha$ Allora l'area del triangolo è $A = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$. Conviene riscrivere il seno mediante il coseno in modo da poter usare la nozione di prodotto scalare: $\frac{1}{2}cb\sin\alpha = \frac{1}{2}cb\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Ci ricordiamo adesso che

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{bc}$$

Sostituendo abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}cb\sin\alpha = \frac{1}{2}cb\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}cb\sqrt{1-\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{bc}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(b_x^2+b_y^2)(c_x^2+c_y^2) - (b_xc_x+b_yc_y)^2} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{b_x^2c_x^2 + b_x^2c_y^2 + b_y^2c_x^2 + b_y^2c_y^2 - (b_x^2c_x^2 + b_y^2c_y^2 + 2b_xb_yc_xc_y)} = \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{b_x^2c_y^2 + b_y^2c_x^2 - 2b_xb_yc_xc_y} = \frac{1}{2}\sqrt{(b_xc_x - b_yc_y)^2} = \frac{1}{2}|b_xc_x - b_yc_y|
\end{aligned}$$

Finalmente, quest'ultima espressione si può riscrivere come

$$\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}|$$

L'ultima uguaglianza si verifica operando con operazioni elementari sul determinante

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x_C - x_A & y_C - y_A & 0 \end{vmatrix}$$

e infine sviluppando il determinante lungo la terza colonna.

2. Dato un triangolo ABC siano D, E, F i punti medi dei tre lati del triangolo. Verificare che l'area del triangolo DEF è un quarto dell'area di ABC.