

27 ottobre 2011

1. Ellisse Dati due punti distinti del piano F_1 e F_2 , detti *fuochi* che siano a distanza $2c > 0$ fra loro e dato un numero reale $a > c$, si chiama **ellisse** la curva luogo dei punti P del piano tali che la somma delle distanze di P dai fuochi sia costante:

$$(1) \quad d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Per trovare un'equazione di questo luogo conviene scegliere il riferimento cartesiano in modo che i fuochi abbiano coordinate $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$. Allora la condizione (1) affinché il punto appartenga alla curva si traduce in

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

da cui elevando al quadrato e semplificando abbiamo

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ (x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x+c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ x^2 - 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\ 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4xc \end{aligned}$$

Dividiamo per 4 e eleviamo ancora al quadrato

$$\begin{aligned} a^2[(x+c)^2 + y^2] &= a^4 + x^2c^2 + 2a^2xc \\ a^2x^2 + a^2c^2 + 2a^2cx + a^2y^2 &= a^4 + x^2c^2 + 2a^2xc \\ a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2 &= a^4 - a^2c^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Ponendo $b^2 = a^2 - c^2$, una quantità certamente positiva nelle nostre ipotesi, abbiamo

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

e dividendo per a^2b^2 (certamente non nullo)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che si dice **equazione canonica dell'ellisse**.

Si vede facilmente da questa equazione che la curva è simmetrica rispetto agli assi coordinati x, y e rispetto all'origine. Inoltre essa incontra gli assi nei punti $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ detti vertici dell'ellisse, ed è interamente contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette $x = \pm a, y = \pm b$. Possiamo infine determinare i fuochi dell'ellisse a partire dall'equazione canonica, infatti, se ci ricordiamo che $b^2 = a^2 - c^2$ allora $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ e $F(\pm c, 0)$.

2. Disegnare l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Determinare vertici, lunghezza dell'asse maggiore, lunghezza dell'asse minore, fuochi e calcolarne l'eccentricità.

3. Disegnare l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{20} = 1$. Determinare vertici, lunghezza dell'asse maggiore, lunghezza dell'asse minore, fuochi e calcolarne l'eccentricità.

4. Iperbole Dati due punti distinti del piano F_1 e F_2 , detti *fuochi* che siano a distanza $2c > 0$ fra loro e dato un numero reale $0 < a < c$, si chiama **iperbole** la curva luogo dei punti P del piano tali

$$(2) \quad |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Ciò si traduce in

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

In maniera del tutto analoga al caso dell'ellisse si può verificare che si ottiene l'equazione

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Poiché ora $a < c$, poniamo $b^2 = c^2 - a^2 > 0$ e semplificando otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

che è l'**equazione canonica dell'iperbole**.

5. Disegnare l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$. Calcolarne fuochi, vertici, asintoti.

6. Parabola Fissato un punto F del piano (fuoco) ed una retta d , detta direttrice, la parabola è il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d . Se scegliamo un riferimento per cui $F(0, c)$ e la direttrice è la retta di equazione $y = -c$ allora la condizione di equidistanza si traduce nell'equazione

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} = |y+c|$$

Elevando al quadrato e semplificando si ottiene

$$y = \frac{1}{4c}x^2$$

che è l'**equazione canonica della parabola**.

7. Disegnare la parabola di equazione $y = 8x^2$ calcolare la direttrice ed il fuoco.

8. Disegnare la parabola di equazione $y = 0,08x^2$ calcolare la direttrice ed il fuoco.