28 ottobre 2011

1. Riassumiamo quanto visto sulla parabola.

Se la parabola ha equazione $x^2 = 4py$ allora se essa ha un asse di simmetria verticale, ha vertice $V(0, 0)$, fuoco $F(0, p)$ e direttrice $y = -p$, la concavità è rivolta verso l'alto nel caso di $p > 0$ e verso il basso se $p < 0$.

Se invece la parabola ha equazione $y^2 = 4px$ allora l'asse di simmetria è orizzontale, il vertice è in $V(0, 0)$, il fuoco $F(p, 0)$ la direttrice $x = -p$, e la concavità è rivolta verso destra se $p > 0$ e verso sinistra se $p < 0$.

2. Riassunto per l'ellisse.

Se l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove $a > b > 0$ allora il centro è $(0, 0)$, i vertici sono $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$, l'asse maggiore (orizzontale) misura $2a$ l'asse minore $2b$, i fuochi sono $(\pm c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a}$. Risulta sempre $0 < e < 1$.

Se l'equazione è $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ dove $a > b > 0$ allora il centro è $(0, 0)$, i vertici sono $(\pm b, 0)$, $(0, \pm a)$, l'asse maggiore (verticale) misura $2a$ l'asse minore $2b$, i fuochi sono $(0, \pm c)$ dove $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a}$. Risulta sempre $0 < e < 1$.

3. Riassunto per l'iperbole.

Se l'equazione è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove $a > 0, b > 0$ allora il centro è $(0, 0)$, i vertici sono $(\pm a, 0)$, l'asse trasverso (orizzontale) misura $2a$, i fuochi sono $(\pm c, 0)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, gli asintoti sono $y = \pm \frac{b}{a}x$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a}$. Risulta sempre $e > 1$.

Se l'equazione è $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ dove $a > 0, b > 0$ allora il centro è $(0, 0)$, i vertici sono $(0, \pm a)$, l'asse trasverso (verticale) misura $2a$, i fuochi sono $(0, \pm c)$ dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, gli asintoti sono $y = \pm \frac{b}{a}x$, l'eccentricità è $e = \frac{c}{a}$. Risulta sempre $e > 1$.

4. Studiare la conica di equazione

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

(Trovare centro, vertici, fuochi, e disegnarla)

Soluzione Si tratta di un'ellisse in posizione non canonica bensì traslata. È sufficiente accorgersi che il centro della conica deve avere per coordinate le soluzioni di $x+1=0, y-2=0$ e quindi il centro è $(-1, 2)$. Confrontando allora con la conica di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ che ha fuochi $(0, \pm\sqrt{5})$ si vede che la nostra conica ha fuochi $(-1, -\sqrt{5}+2)$ e $(-1, \sqrt{5}+2)$, vertici $(-1, -1), (-1, 5), (1, 2), (-3, 2)$ ed eccentricità $\frac{\sqrt{5}}{9} \sim 0,248$.

5. Studiare le seguenti coniche

- (1) $x^2 - 4x = 8y - 28$;
- (2) $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$;
- (3) $\frac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$;

2

(4) $y^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1;$

(5) $y^2 = 16x - 8;$

(6) $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$