31 ottobre 2011

1. Ricordiamo la fomula per un cambiamento di coordinate nell'ipotesi che le origini O e O' coincidano:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ x = x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{cases}$$

dove ϕ è l'angolo della rotazione che porta il riferimento $RC(O,\vec{i},\vec{j})$ a sovrapporsi con $RC(O,\vec{i'},\vec{j'})$. Se $\phi = \frac{\pi}{6}$, calcolare le coordinate in RC' del punto $P(2,-4)$ in RC. (Soluzione: $(\sqrt{3}-2, -1-2\sqrt{3})$).

2. Riconoscere che il luogo dei punti soddisfacenti $xy = 2$ è un'iperbole.

Soluzione È facile disegnare il grafico dell'equazione se la riscriviamo nella forma $y = \frac{2}{x}$. Per riconoscere che si tratta di una iperbole pensiamo di usare gli assi di simmetria dell'iperbole, che sono le bisettrici dei quadranti, come nuovi assi coordinati. La matrice C del cambiamento è

$$C = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sostituendo in $xy = 2$ abbiamo

$$(x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2})(x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 2$$

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

È un'iperbole con vertici $(\pm 2, 0)$ e asintoti $y' = \pm x'$ nel riferimento RC' che corrispondono agli assi coordinati del sistema RC. I fuochi sono $(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ che nel riferimento RC sono $(\pm 2, \pm 2)$. Ora l'iperbole si può facilmente disegnare.

3. Data un equazione generica di secondo grado in due variabili:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Calcolare un'espressione per i coefficienti della nuova equazione

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

ottenuta operando il cambiamento (*).

Soluzione Si ottiene

$$A' = A\cos^2\phi + B\sin\phi\cos\phi + C\sin^2\phi$$

$$B' = -2A\sin\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2C\sin\phi\cos\phi$$

$$C' = A\sin^2\phi - B\sin\phi\cos\phi + C\cos^2\phi$$

$$D' = D\cos\phi + E\sin\phi$$

$$E' = -D\sin\phi + E\cos\phi$$

$$F' = F$$

4. Determinare l'angolo ϕ in modo tale che nell'esercizio precedente si ottenga $B' = 0$.

Soluzione Si tratta di risolvere l'equazione

$$-2A\sin\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2C\sin\phi\cos\phi = 0$$

$$2(C-A)\sin\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \sin^2\phi) = 0$$

$$(C-A)\sin 2\phi + B\cos 2\phi = 0$$

Dividendo per $B\sin 2\phi$:

$$\cot 2\phi = \frac{A-C}{B}$$

Osserviamo che ϕ non dipende da D, E, F.

5. Studiare la conica di equazione

$$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3} \tag{1}$$

Soluzione Dall'esercizio precedente abbiamo

$$\cot 2\phi = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

da cui $2\phi = \frac{\pi}{3}, \phi = \frac{\pi}{6}$. Abbiamo allora dalle (*):

$$\begin{cases} x = x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'\frac{1}{2} \\ x = x'\frac{1}{2} + y'\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione della conica data abbiamo

$$6\sqrt{3}(x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'\frac{1}{2})^2 + 6(x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'\frac{1}{2})(x'\frac{1}{2} + y'\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4\sqrt{3}(x'\frac{\sqrt{3}}{2} + y'\frac{1}{2})^2 = 21\sqrt{3}$$

Sviluppando e semplificando si ottiene

$$\frac{28}{4}\sqrt{3}x'^2 + 3\sqrt{3}y'^2 = 21\sqrt{3}$$

e infine dividendo per $21\sqrt{3}$:

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{7} = 1 \tag{2}$$

Questa è un'ellisse in posizione canonica nel riferimento RC'. Il centro è $(0,0)$, i vertici $(\pm\sqrt{3},0)$, $(0,\pm\sqrt{7})$, asse maggiore misura $2\sqrt{7}$, l'asse minore $2\sqrt{3}$, i fuochi sono $(0,\pm 2)$, l'eccentricità è $\frac{2}{\sqrt{7}}$. Usando le (*) si trova che i fuochi sono $(1,-\sqrt{3})$ e $(-1,\sqrt{3})$, i vertici sono $(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{2})$. Disegnare l'ellisse.

6. Usare le formule trovate nell'esercizio **3.** per verificare che $A' + B' = A + B$ e che ${B'}^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. Le espressioni $I = A + B$ e $\alpha_{00} = -\frac{1}{4}(B^2 - 4AC)$ sono dette, rispettivamente, invariante lineare e invariante quadratico della conica.

7.Si dimostra che esiste anche un terzo invariante, detto invariante cubico:

$$\mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} F & \frac{1}{2}D & \frac{1}{2}E \\ \frac{1}{2}D & A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}E & \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix}$$

e che la conica è non degenere se e solo se $\mathcal{A} \neq 0$.

Calcolare la terna di invarianti $(I, \alpha_{00}, \mathcal{A})$ per le equazioni (1) e (2) dell'esercizio **5.** e verificare che non sono uguali ma che esiste un coefficiente ρ tale che le due terne sono nella relazione

$$(\rho I, \rho^2\alpha_{00}, \rho^3\mathcal{A}) = (I', \alpha'_{00}, \mathcal{A}')$$

8. Se supponiamo che $B = 0$, l'invariante quadratico α_{00} si riduce a AC. Si distinguono allora i seguenti casi:

(1) $AC = 0$, ciò significa che uno dei due coefficienti A o C è nullo e quindi abbiamo una parabola;
(2) $AC > 0$, i due coefficenti sono concordi ed abbiamo un'ellisse.
(3) $AC < 0$, i due coefficienti sono discordi e quindi abbiamo un'iperbole.

Applicare quanto detto all'equazione:

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

per riconoscere il tipo di conica.

Soluzione Abbiamo $\alpha_{00} = -\frac{1}{4}(B^2 - 4AC) = -\frac{1}{4}(5^2 - 4(3)(-2)) = -\frac{49}{4} < 0$ ed abbiamo quindi un'iperbole.

9. Usare gli invarianti per riconoscere il tipo di conica e per trovare l'equazione canonica di

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$$

Soluzione L'invariante cubico è

$$\mathcal{A} = \det \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \frac{5}{2} \begin{vmatrix} -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{25}{2} \neq 0$$

Dunque la conica è non degenere. Si tratta di una parabola in quanto $\alpha_{00} = 0$. L'invariante lineare è $I = 4$. Sappiamo allora che la forma canonica deve essere della forma $\alpha {x'}^2 + y' = 0$ con α da determinare. Tale equazione corrisponde alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Di qui abbiamo quindi $\mathcal{A} = -\frac{1}{4}\alpha$, $\alpha_{00} = 0$, $I = \alpha$. Confrontando con l'altra matrice abbiamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}\alpha = \rho^3(-\frac{25}{2}) \\ \alpha = \rho 4 \end{cases}$$

ricavando ρ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ricava

$$\alpha^2 = \frac{32}{25}, \alpha = \pm\frac{4\sqrt{2}}{5}$$

Abbiamo quindi due possibili parabole $\frac{4\sqrt{2}}{5}{x'}^2 + y' = 0$ (con la concavità verso il basso) e $-\frac{4\sqrt{2}}{5}{x'}^2 + y' = 0$ (con la concavità verso l'alto).