3 e 4 novembre 2011

N.B. Negli esercizi **1.** e **2.** qui sotto indichiamo una possibile dimostrazione del fatto che il prodotto vettoriale, come definito a lezione e richiamato qui sotto, soddisfa le proprietà di linearità (cfr., ad esempio, le proprietà 1) e 2) del paragrafo 8.2 del libro di testo 1.)

1. Ricordiamo che, dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il loro prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ è il vettore di modulo $|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$ (dove θ è l'angolo (convesso) compreso tra i due vettori assegnati), direzione perpendicolare ad entrambi e verso scelto in modo che la terna $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}$ sia equiversa a $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Dimostrare, a partire da questa definizione, che per qualunque scalare k si ha:

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

2.

(1) Supponiamo che $\vec{u}$ sia un versore e $\vec{v}$ un vettore arbitrario perpendicolare a $\vec{u}$ e immaginiamo che siano entrambi applicati in O. Verificare che allora il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ si ottiene facendo ruotare $\vec{v}$ di un angolo retto intorno alla retta orientata passante per O e versore $\vec{u}$ in senso antiorario. (v. figura **prodotto vett 1.png**)

(2) Se $\vec{v}$ non è perpendicolare a $\vec{u}$, possiamo decomporre $\vec{v} = \vec{w} + a\vec{u}$. (v. figura **prodotto vett 2.png**). Tenuto conto che l'area del parallelogramma costruito su $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è uguale a quella del parallelogramma costruito su $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e che le due coppie sono equiverse sul piano si ha:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\vec{w} + a\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

(3) Si ha

$$\begin{aligned} &\vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \wedge (\vec{w_1} + a_1\vec{u} + \vec{w_2} + a_2\vec{u}) = \\ &= \vec{u} \wedge [(\vec{w_1} + \vec{w_2}) + (a_1 + a_2)\vec{u}] \end{aligned}$$

dove a_1, a_2 sono scalari, i vettori $\vec{w_1}$ e $\vec{w_2}$ sono perpendicolari a $\vec{u}$ e quindi anche $\vec{w_1} + \vec{w_1}$ è perpendicolare a $\vec{u}$. Per il punto (1), i vettori $\vec{u} \wedge \vec{w_1}$, $\vec{u} \wedge \vec{w_2}$, $\vec{u} \wedge (\vec{w_1} + \vec{w_2})$ si ottengono rispettivamente da $\vec{w_1}$,$\vec{w_2}$ $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ con la stessa rotazione di un angolo retto intorno alla retta orientata con versore $\vec{u}$, quindi

$$\vec{u} \wedge (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{u} \wedge \vec{w_1} + \vec{u} \wedge \vec{w_2}$$

(4) Dai punti precedenti possiamo dedurre

$$\begin{aligned} &\vec{u} \wedge (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \wedge (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{u} \wedge \vec{w_1} + \vec{u} \wedge \vec{w_1} = \\ &= \vec{u} \wedge (\vec{w_1} + a_1\vec{u}) + \vec{u} \wedge (\vec{w_2} + a_2\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v_1} + \vec{u} \wedge \vec{v_2} \end{aligned}$$

(5) Otteniamo infine la proprietà generale applicando il risultato dell'esercizio precedente.

3. Applicare le proprietà dimostrate negli esercizi precedenti per verificare che se $\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ e $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ allora

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

4. Calcolare il prodotto vettoriale $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$ dove

$$P_1(3,4,5), P_2(0,1,3), P_3(-1,-2,-5).$$

5. Calcolare la distanza tra le due rette parallele r e s, dove r è la retta passante per $P_1(1,2,3), P_2(4,5,0)$, mentre s è la retta passante per l'origine e il punto $Q(1,1,-1)$.

6. Calcolare l'equazione del piano passante per il punto $P_0(2,3,-5)$ e perpendicolare al vettore $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

7. Verificare che l'insieme dei piani passanti per il punto $P_0(2,3,-5)$ e perpendicolari al piano di equazione $x+y+z=0$ formano un fascio proprio. Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche dell'asse del fascio.

8. Determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ in modo che il parallelepipedo determinato dai vettori $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$ abbia volume 6.