

7 novembre 2011

1. Osserviamo che l'equazione cartesiana di un piano:

$$ax + by + cz = 0$$

alla luce di quanto visto in aula, può essere interpretata come la condizione che deve essere soddisfatta da un punto $P(x, y, z)$ perché esso giaccia sul piano. Essa infatti si può esprimere mediante la condizione che il vettore $\overrightarrow{OP}$ sia perpendicolare alla normale $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Supponiamo dunque data una retta r mediante delle equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Vogliamo calcolare le componenti di un vettore parallelo ad essa, ossia i parametri direttori di r . Per far ciò osserviamo innanzitutto che possiamo ridurci al caso di una retta passante per l'origine, perché il vettore non cambia se pensiamo di traslare la retta. In altre parole possiamo considerare le equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

Chiamiamo α il piano di equazione $ax + by + cz = 0$ e β il piano di equazione $a'x + b'y + c'z = 0$. Il vettore $\vec{r}$ che vogliamo determinare sarà perpendicolare sia a $\vec{n}_\alpha$ che a $\vec{n}_\beta$, avendo indicato con notazione ovvia le normali ai piani. Risulterà allora che un vettore parallelo ad r è $\vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta$. Si vede quindi che i parametri direttori desiderati sono dati da:

$$\ell = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Esercizio Calcolare i parametri direttori della retta r di equazioni:

$$\begin{cases} x - 3y + 4z - 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

Soluzione

$$\ell = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad m = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad n = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. Determinare l'equazione del piano passante per $P_0(2, -2, 5)$ e parallelo al piano $\alpha : x + 3y - z - 5 = 0$.

3. Trovare l'equazione del piano passante per la retta $r : x + y = 3, x - y - z = 4$ e parallelo alla retta $s : y + 3z - 8 = 0, 4x - y - z = 0$

4. Determinare le equazioni cartesiane della retta r passante per il punto $P_0(2, 3, -4)$, parallela al piano $\alpha : x - 5y + 3z - 2 = 0$ e incidente l'asse x .

Suggerimento Pensare alla retta come ottenuta dalla intersezione di due piani e quindi spostare l'attenzione alla ricerca di due piani con le caratteristiche opportune.

5. Determinare le equazioni della retta passante per il punto $P(3, 3, 5)$ e perpendicolare al piano $\alpha : 4x - 3y + 5z - 7 = 0$.

6. Verificare che le rette $r : x = z - 1, y = -2z - 3$, e $s : x + 17z + 5 = 0, y + 8z + 3 = 0$ sono perpendicolari ma non incidenti. Trovare una retta perpendicolare a r che sia anche incidente ad r nel punto $P_0(0, -5, 1)$.

7. Calcolare la distanza tra i due piani paralleli

$$\alpha : x + 3y + 4z - 5 = 0 \quad \text{e} \quad \beta : x + 3y + 4z + 7 = 0$$

8. Calcolare la distanza tra le due rette parallele

$$r : \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = 4 + 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = -1 - 4u \\ y = 8 + 3u \\ z = u \end{cases}$$

9. Calcolare la distanza del punto $P_0(4, 4, -4)$ dal piano $\alpha : x + 3y + 4z - 5 = 0$.