8 novembre 2011

1. Una circonferenza nel piano è il luogo dei punti che hanno distanza fissata, uguale al raggio r, da un fissato punto, il centro, C. In un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, x, y)$ possiamo supporre che $C(x_0, y_0)$ e allora un punto $P(x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se soddisfa l'equazione

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

ovvero sviluppando:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \tag{1}$$

dove $a = -2x_0$, $b = -2y_0$, $c = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Ogni equazione di tipo (1) è l'equazione cartesiana di una circonferenza, purché $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Nel piano euclideo complessificato, cioè in cui si considerino anche punti a coordinate complesse, ogni equazione della forma

$$\lambda(x^2 + y^2) + ax + ay + c = 0 \tag{2}$$

rappresenta una circonferenza, eventualmente si dice "generalizzata" se $a^2 + b^2 - 4c \leq 0$.

Ad esempio, l'equazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ rappresenta una circonferenza di raggio nullo e centro (x_0, y_0) costituita da un solo punto reale (il centro) e da infiniti punti complessi appartenenti alle due rette complesse di equazioni

$$y - y_0 = i(x - x_0), \quad y - y_0 = -i(x - x_0)$$

(nel campo complesso infatti si ha

$$[i(x - x_0) + (y - y_0)][-i(x - x_0) + (y - y_0)] = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)$$

Come altro esempio: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -1$ rappresenta una circonferenza di raggio immaginario $r = i$ e centro (x_0, y_0). Essa non ha alcun punto reale.

Anche $\lambda = 0$ nell eq. (2) ci permette di pensare alla retta $ax + by + c = 0$ come ad una circonferenza generallizzata.

Esercizio 1. Verificare che i punti $A(1, -1), B(0, 1), C(2, 1)$ non sono allineati. Scrivere un'equazione cartesiana per la circonferenza che li contiene.

2. Dimostrare che per tre punti non allineati passa una ed una sola circonferenza (non generalizzata). (**Suggerimento**: Impostare un sistema di equazioni e vedere che tale sistema ammette una ed una sola soluzione precisamente quando i tre punti non sono allineati.)

3. Verificare che l'equazione della circonferenza passante per i tre punti

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3)$$

si può scrivere come segue:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ripetere l'**esercizio 1.** con questa formula.

4. In maniera del tutto analoga una sfera di centro $C(x_0, y_0, z_0)$ e raggio r nello spazio con riferimento $RC(O, x, y, z)$ ha equazione

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0) = r^2$$

ossia

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

con la condizione che $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

Scrivere l'equazione cartesiana della sfera passante per i punti

$$A(1,0,0), B(1,-1,0), C(0,1,1), D(1,1,1)$$

.

5. Verificare che per quattro punti non complanari passa una ed una sola sfera la cui equazione si può scrivere, con ovvie notazioni:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+x^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$