15 novembre 2011

1. Data una matrice A $m \times n$, si definiscono i seguenti quattro sottospazi fondamentali:

(a) $C(A)$, spazio generato dalle colonne di A;
(b) $R(A)$, spazio generato dalle righe di A;
(c) $null(A) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = 0\}$;
(d) $imA = \{Y \in \mathbb{R}^m | Y = AX \text{ per qualche } X \in \mathbb{R}^m\}$.

Allo scopo di determinare questi sottospazi, domandiamoci quale sia la relazione tra questi spazi e i corrispondenti spazi della matrice R, forma a gradini della matrice A. Per far ciò svolgiamo, per esempio, l'esercizio assegnato la volta scorsa:

Calcolare i quattro spazi fondamentali relativi alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e confrontarli con gli analoghi spazi di R, sua forma a scala:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soluzione: $C(A) = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ questo è un sottospazio di dimensione 2, cioè un piano, di $\mathbb{R}^3$, di cui, volendo, possiamo scrivere le equazioni cartesiane: $8x - 6y - 23y = 0$. Confrontiamo con $C(R) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ che ha equazione $z = 0$. Essi sono dunque distinti.

$R(A) = \langle (3,5), (4,-1), (0,2) \rangle$. È facile verificare che $R(A) = \mathbb{R}^2 = R(R) = \langle (1, \frac{5}{3}), (0,1) \rangle$

$null(A)$ consiste di tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$. Il metodo di risoluzione di Gauss ci dice che questo sistema è equivalente, cioè ammette le stesse soluzioni di, $RX = 0$. Pertanto $null(A) = null(R)$.

Infine, $im(A)$ è l'insieme dei "termini noti" $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ per cui il sistema $AX = B$ ammette soluzioni. Il teorema di Rouché-Capelli implica che tale sistema ha soluzione precisamente quando $rg(A) = rg(A|B)$. Ricordando uno dei vari modi di interpretare la nozione di rango, ciò si può interpretare dicendo che la colonna B è combinazione lineare delle colonne di A: più precisamente, se $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ è ua soluzione di $AX = B$ allora scrivendo la matrice A per colonne $A = [C_1, C_2, C_3]$, abbiamo

$$AX = B \iff [C_1, C_2, C_3] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = B \iff B = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3$$

Quanto precede dimostra quindi che $im(A) = C(A)$ che quindi non coincide con $im(R)$.

2. Se R è una matrice a gradini verificare che le righe non nulle di R sono linearmente indipendenti e che formano una base dello spazio delle righe di R. Verificare inoltre che le colonne che contengono i pivot sono indipendenti e formano una base per lo spazio delle colonne di R.

3. I punti 1. e 2. ci permettono dunque di calcolare lo spazio delle righe di una qualunque matrice $m \times n$. Ad esempio: Determinare lo spazio delle righe di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovando la sua forma ridotta R, magari usando qualche tipo di software, abbiamo

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da cui possiamo concludere che una base per $R(A)$ è

$$\{(1, 0, -1, -2, -3, 0, 0, 0), (0, 1, 2, 3, 4, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$
$$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$$

4. Per calcolare lo spazio delle colonne non possiamo più dire che una base si trova prendendo le colonne della forma ridotta R. Gli spazi delle colonne sono diversi. Tuttavia essi hanno la medesima dimensione. Più precisamente, possiamo sfruttare il seguente

Teorema del rango. *La dimensione dello spazio delle colonne di A è uguale alla dimensione dello spazio delle righe di A ed è quindi uguale al rango.* **Inoltre una base di $C(A)$ è data dalle colonne di A corrispondenti alle colonne di R in cui si trovano i pivot.**

Dimostrazione. Scriviamo la matrice A a blocchi, per colonne: $A = [C_1, \dots, C_n]$, dove C_j è la j-esima colonna di A. Usiamo il fatto che la sua forma ridotta R si può scrivere come $R = UA$ dove U è una opportuna matrice **invertibile** U (prodotto delle operazioni elementari che trasformano A in R). Abbiamo allora

$$R = UA = U[C_1, \dots, C_n] = [UC_1, \dots, UC_n].$$

Indichiamo con $UC_{j_1}, UC_{j_2}, \dots, UC_{j_r}$, dove r è il rango di A, le colonne dominanti di R, cioè quelle che contengono i pivot. Sappiamo che allora

$$\{UC_{j_1}, UC_{j_2}, \dots, UC_{j_r}\}$$

è una base di $C(R)$. Vogliamo ora dimostrare che $\{C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r}\}$ è una base di $C(A)$. Per questo occorre dimostrarne l'indipendenza lineare e che essi sono dei generatori.

(I) Indipendenza. Sia $t_1C_{j_1} + t_2C_{j_2} + \cdots + t_rC_{j_r} = 0$. Moltiplichiamo ambo i membri per U:

$$0 = U0 = U(t_1C_{j_1} + t_2C_{j_2} + \cdots + t_rC_{j_r}) = t_1UC_{j_1} + t_2UC_{j_2} + \cdots + t_rUC_{j_r}$$

ma allora, per la supposta indipendenza lineare dei vettori

$$\{UC_{j_1}, UC_{j_2}, \dots, UC_{j_r}\}$$

abbiamo $t_1 = t_2 = \cdots = t_r = 0$ cioè la tesi.

(G) Generatori. Dato $X \in C(A)$, $X = r_1C_1 + r_2C_2 + \cdots + r_nC_n$ per definizione di $C(A)$. Allora $UX = r_1UC_1 + r_2UC_2 + \cdots + r_nUC_n$ che appartiene necessariamente a $C(R)$ di cui conosciamo una base: $\{UC_{j_1}, UC_{j_2}, \dots, UC_{j_r}\}$. Esiste dunque certamente un modo di esprimere UX in termini di questi vettori:

$$UX = t_1UC_{j_1} + t_2UC_{j_2} + \cdots + t_nUC_{j_r}$$

Abbiamo in definitiva:

$$UX = U(t_1C_{j_1} + t_2C_{j_2} + \cdots + t_nC_{j_r})$$

Moltiplicando ambo i membri per U^{-1} abbiamo che $X \in \langle C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_r}\rangle$ come richiesto.

□

5. Calcolare lo spazio delle colonne della matrice dell'esercizio 3.
Dal Teorema del Rango abbiamo che una base di $C(A)$ è data da

$$\{C_1, C_2, C_6, C_7, C_8\}:$$

$$C_1 = \begin{pmatrix}1\\4\\1\\1\\8\\7\\1\end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\2\\2\\8\\6\\1\end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix}6\\9\\6\\8\\8\\2\\1\end{pmatrix}, \quad C_7 = \begin{pmatrix}7\\9\\7\\8\\8\\3\\1\end{pmatrix}, \quad C_8 = \begin{pmatrix}8\\9\\7\\8\\8\\4\\1\end{pmatrix}$$