

16 novembre 2011 Sul concetto di dimensione

1.

Teorema Fondamentale. *Sia V un qualunque spazio vettoriale generato da un numero finito di vettori $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Se $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V allora $m \leq n$. In altre parole, il numero di vettori indipendenti non può superare il numero dei generatori.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Supponiamo quindi che $m > n$, il numero di vettori indipendenti sia maggiore del numero di generatori. Consideriamo il vettore $\mathbf{u}_1$. In quanto vettore di V esso ha una espressione del tipo $\mathbf{u}_1 = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_n \mathbf{v}_n$ con opportuni coefficienti $r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Non tutti i coefficienti r_i sono nulli altrimenti $\mathbf{u}_1$ sarebbe nullo ma ciò è escluso in quanto $\mathbf{u}_1$ è parte di un insieme indipendente. Eventualmente riordinando i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ possiamo supporre che $r_1 \neq 0$. Allora

$$\begin{aligned} r_1 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 - (r_2 \mathbf{v}_2 + \dots + r_n \mathbf{v}_n) \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{1}{r_1} \mathbf{u}_1 - \frac{1}{r_1} (r_2 \mathbf{v}_2 + \dots + r_n \mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Possiamo allora scrivere $V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$, abbiamo cioè “scambiato” $\mathbf{v}_1$ con $\mathbf{u}_1$. Possiamo pertanto esprimere

$$\mathbf{u}_2 = s_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 + \dots + t_n \mathbf{v}_n$$

Qualcuno dei coefficienti t_i deve essere non nullo altrimenti avremmo $\mathbf{u}_2 = s_1 \mathbf{u}_1$ ma ciò è escluso in quanto $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ fanno parte di un insieme di vettori indipendenti. Possiamo supporre che sia $t_2 \neq 0$. Ripetendo un ragionamento analogo a quanto fatto prima possiamo dire che $\mathbf{v}_2$ si può esprimere come combinazione lineare di $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n$, e quindi, in fin dei conti, si ha

$$V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$$

Abbiamo dunque scambiato i primi due vettori. Possiamo ripetere questa argomentazione finché, essendo $m > n$, sostituiremo tutti i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ con i vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. In altre parole, otterremo

$$V = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$$

Consideriamo ora $\mathbf{u}_{n+1}$. In quanto vettore di V deve potersi scrivere $\mathbf{u}_{n+1} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_n \mathbf{u}_n$, ma ciò contraddice l'indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{u}_i$. Questa contraddizione implica l'asserto. $\square$

2. Il Teorema Fondamentale ha come conseguenza immediata il Teorema di Invarianza, il quale afferma che due basi diverse di uno stesso spazio vettoriale possiedono lo stesso numero di elementi. Più precisamente:

Teorema di Invarianza. *Se $\{b_1, \dots, b_n\}$ e $\{d_1, \dots, d_m\}$ sono due basi di uno spazio vettoriale V allora $m = n$.*

Dimostrazione. Considero dapprima l'insieme $\{b_1, \dots, b_n\}$ come insieme di generatori e l'insieme $\{d_1, \dots, d_m\}$ come insieme di vettori indipendenti. Il Teorema

Fondamentale implica allora che $m \leq n$. Possiamo però scambiare il ruolo dei due insiemi ed ottenere dallo stesso teorema che $n \leq m$. Di conseguenza $m = n$ $\square$

Questo numero comune a tutte le basi viene detto **dimensione** di V .

3. Nei punti precedenti abbiamo dimostrato che due eventuali basi hanno sempre lo stesso numero di vettori. Ora vogliamo assicurarci che uno spazio vettoriale V possieda sempre una base. Ci domandiamo se esista sempre una base di uno spazio vettoriale. Per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$, ad esempio, non è possibile trovare un numero finito di polinomi che costituiscano una base. In tal caso diremo che lo spazio ha dimensione infinita.

Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale finitamente generato, vale a dire che $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ come nel punto 1.

Dimostriamo, preliminarmente, il seguente

Lemma di Indipendenza. *Se $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme di vettori indipendenti, e se $\mathbf{v} \in V$, ma $\mathbf{v} \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ allora $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ rimane ancora un insieme di vettori indipendenti.*

La situazione descritta in questo lemma è analoga alla situazione di un piano, cioè un sottospazio generato da due vettori, nello spazio tridimensionale in cui prendiamo un vettore che non giaccia nel piano, allora i due vettori di partenza più questo terzo vettore costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Consideriamo una combinazione lineare

$$(1) \quad a\mathbf{v} + a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

Se fosse $a \neq 0$ avremmo $\mathbf{v} = \frac{1}{a}(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n)$ ma ciò è escluso per ipotesi. Dunque $a = 0$. Ma allora la relazione (1) diventa

$$(2) \quad a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = 0$$

e questa implica $a_1 = \dots = a_n = 0$ per l'indipendenza lineare dei vettori

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}.$$

In tal modo tutti i coefficienti sono nulli ad abbiamo dimostrato l'indipendenza. $\square$

Utilizzando questo lemma possiamo ora dimostrare che ogni spazio vettoriale finitamente generato possiede una base.

Teorema di esistenza delle basi. *Sia V uno spazio vettoriale non nullo, generato da $n \geq 1$ vettori. Allora*

- (1) *V possiede una base e la dimensione di V è minore o uguale a n .*
- (2) *Ogni sottoinsieme di vettori indipendenti è parte di una base.*
- (3) *Ogni insieme di generatori contiene una base.*

Dimostrazione. Poiché V non è lo spazio vettoriale nullo, possiamo considerare un vettore $\mathbf{v}_1 \in V$, $\mathbf{v}_1 \neq 0$. L'insieme $\{\mathbf{v}_1\}$ è un insieme di vettori indipendenti. I casi sono due: o $V = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$, nel qual caso abbiamo trovato una base e $\dim V = 1 \leq n$, oppure no. In questo secondo caso possiamo trovare un vettore

$\mathbf{v}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1 \rangle$. Per il Lemma di Indipendenza allora l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è un insieme indipendente. Di nuovo abbiamo due possibilità: $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ e abbiamo finito, oppure esiste un nuovo vettore $\mathbf{v}_3$ fuori dallo spazio generato dai primi due. Ad un certo punto, poiché lo spazio è finitamente generato, si troverà necessariamente che $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ con $k \leq n$ perché altrimenti avremmo una contraddizione con il Teorema Fondamentale (non possiamo trovare un numero di vettori indipendenti maggiore del numero di generatori). Questo dimostra sia il punto (1) che il punto (2) dell'enunciato.

Per dimostrare il punto (3), cominciamo supponendo di avere un certo insieme di generatori: $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Se questo insieme è anche indipendente abbiamo una base e dunque la conclusione. Se non è un insieme indipendente allora qualcuno dei vettori si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti. Possiamo supporre che sia $\mathbf{v}_1$ a potersi così esprimere. Pertanto $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Di nuovo se questi vettori sono indipendenti abbiamo trovato una base. Altrimenti ripetiamo il ragionamento. In tal modo, bisognerà che ad un certo punto ci si arresti ad un insieme indipendente che potrebbe essere un unico vettore non nullo. In ogni modo avremo trovato la base richiesta. $\square$

4. Se $V = \{0\}$, allora chiaramente non esistono vettori indipendenti in V . Risulta dunque naturale dire che $\dim V = 0$. Per convenzione potremo dire che la base di $V = \{0\}$ è $\emptyset$, in modo che, senza eccezioni, si possa dire che la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato è il numero di vettori in una sua base.

5. Sapendo che lo spazio vettoriale $\mathbb{P}_5$ dei polinomi in x a coefficienti reali di grado minore o uguale 5 ha dimensione 6, dimostrare che ogni polinomio di $\mathbb{P}_5$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare di elementi dell'insieme

$$(3) \quad \{1, (x+2), (x+2)^2, (x+2)^3, (x+2)^4, (x+2)^5\}.$$

Possiamo però ragionare così. Se dimostriamo che i vettori di (3) sono una base di $\mathbb{P}_5$ abbiamo concluso. In generale, per dimostrare che un certo insieme è una base occorre dimostrare due cose: che è indipendente e che genera. Ora ciò sembra un circolo vizioso, giacché il punto dell'esercizio è proprio dimostrare che questi vettori generano $\mathbb{P}_5$. Tuttavia, se dimostriamo l'indipendenza lineare di essi, il Teorema di Esistenza ci garantisce che essi fanno parte di una base. D'altra parte il Teorema di Invarianza ci dice che una base deve contenere 6 vettori. L'unica possibilità è che essi stessi costituiscano una base, e quindi la verifica che siano generatori in questo caso diventa superflua.

In altre parole, ci viene richiesto di dimostrare che quei vettori sono dei generatori e lo facciamo dimostrando che essi sono indipendenti.

Indipendenza:

$$(4) \quad \alpha_0 + \alpha_1(x+2) + \alpha_2(x+2)^2 + \alpha_3(x+2)^3 + \alpha_4(x+2)^4 + \alpha_5(x+2)^5 = 0$$

Osserviamo che il coefficiente di grado 5 di questo polinomio è necessariamente α_5 che dunque deve essere 0. Ma allora (4) diventa

$$(5) \quad \alpha_0 + \alpha_1(x+2) + \alpha_2(x+2)^2 + \alpha_3(x+2)^3 + \alpha_4(x+2)^4 = 0$$

e lo stesso ragionamento implica che $\alpha_4 = 0$. In tal modo si dimostra che tutti i coefficienti sono nulli. Come richiesto.

6. Nell'esercizio precedente abbiamo utilizzato il seguente principio generale: Se V è uno spazio di cui si conosca la dimensione, diciamo n , allora un insieme $\mathcal{B}$ di n vettori è indipendente se e solo se genera V (e quindi è una base).

Infatti se $\mathcal{B}$ è indipendente esso è parte di una base ma per il Teorema di Invarianza esso deve coincidere con una base.

D'altra parte se $\mathcal{B}$ è un sistema di generatori esso contiene una base e lo stesso teorema implica che deve coincidere con una base.

7. Dimostrare che se U è un sottospazio di uno spazio V e $\dim V = n$ allora U ha una base e $\dim U \leq n$. Inoltre se $\dim U = n$ allora $U = V$.

Soluzione. Se $U = \{0\}$ allora $\dim U = 0 \leq n$.

Se $U \neq \{0\}$, sia $\mathbf{u}_1 \neq 0$ vettore di U . Se $\langle \mathbf{u}_1 \rangle = U$ allora abbiamo trovato una base di U , $\dim U = 1$ e la dimensione di V è almeno 1 in quanto $\mathbf{u}_1$ è anche un vettore non nullo di V : $\dim U = 1 \leq \dim V$. Altrimenti possiamo procedere come nella dimostrazione del Teorema del punto 3 ed ottenere una insieme di vettori indipendenti via via più grande. Ma essendo questi vettori anche vettori di V , il Teorema Fondamentale implica che dovrà comunque rimanere minore o uguale al numero n dei generatori di V .

Supponiamo infine che U sia un sottospazio di V di dimensione uguale a tutto lo spazio. Ciò significa che U possiede una base $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Ma essendo questi anche vettori di V di numero $n = \dim V$ questi devono costituire anche una base di V . Dunque $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle = V$.

8. Trovare una base e calcolare la dimensione del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Scrivere le equazioni cartesiane di U .

9. Sia $V = M(2 \times 2)$ e sia U il sottospazio di V definito da

$$U = \{A \mid AB = BA\}$$

dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base di U .