

17 novembre 2011 Trasformazioni Lineari

1. Una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$ tra due spazi vettoriali è una applicazione che soddisfa:

$$\begin{cases} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\ T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u}) \end{cases}$$

In particolare parleremo di **endomorfismo** o **operatore lineare** se $T : V \rightarrow V$.

Esempio 1 Rotazioni del piano. $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare, anzi un endomorfismo.

Esempio 2 La trasposizione di matrici

$$T : M(m \times n) \rightarrow M(n \times m)$$

definita da $T(A) = A^T$ è una trasformazione lineare ma non un endomorfismo.

Esempio 3 La derivazione:

$$D : \mathbb{P}_5 \rightarrow \mathbb{P}_4$$

definita da $D(a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 5a_5x^4 + 4a_4x^3 + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ è una trasformazione lineare.

Esempio 4 L'applicazione

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

definita da

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + y \\ x - z \\ y + 2w \end{pmatrix}$$

è una trasformazione lineare.

Esempio 5 La proiezione ortogonale $P_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che proietta ortogonalmente un vettore dato sulla retta r è una trasformazione lineare.

2. Verificare che se $T : V \rightarrow W$ e $S : V \rightarrow W$ sono due trasformazioni lineari e se $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, allora se $T(\mathbf{v}_i) = S(\mathbf{v}_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ allora $T = S$ cioè $T(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$.

Soluzione Se $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ allora un generico elemento di V è $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k$. Allora

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_k\mathbf{v}_k) = (\text{ per la linearità di } T) \\ &= a_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_kT(\mathbf{v}_k) = a_1S(\mathbf{v}_1) + \dots + a_kS(\mathbf{v}_k) = S(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

3.

Teorema. Se $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ è una base dello spazio vettoriale V e $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ è un insieme qualunque di vettori di W , allora esiste ed è unica l'applicazione lineare $T : V \rightarrow W$ tale che $T(\mathbf{b}_i) = \mathbf{w}_i$, con $i = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Per il punto 2., se una tale trasformazione esiste essa è unica. Occorre solo dimostrarne l'esistenza.

Sia $\mathbf{v} \in V$. Allora $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{b}_1 + \dots + a_n \mathbf{b}_n$ è questa espressione è unica perché $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ è una base. Definiamo allora $T(\mathbf{v})$ come segue

$$T(\mathbf{v}) = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_n \mathbf{w}_n$$

Si verifica facilmente che la trasformazione così definita è lineare. $\square$

4. Determinare una trasformazione lineare da $M(2 \times 2)$ a $\mathbb{R}^2$ tale che

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (5, 4), T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1, -2),$$

$$T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 4), T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Calcolare $T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione Scriviamo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora

$$T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 2T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} &= 2(5, 4) + 2(1, -2) + (-2)(0, 4) + 5(0, 0) \\ &= (10, 8) + (2, -4) + (0, -8) + (0, 0) = (12, -4) \end{aligned}$$

5. Determinare il nucleo e l'immagine delle trasformazioni lineari del punto 1.

6. Supponiamo di avere un endomorfismo $T : V \rightarrow V$, e, se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono due vettori di V , supponiamo di sapere che $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 3\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $T(\mathbf{u} - 2\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Determinare $T(4\mathbf{u} + \mathbf{v})$ e $T(\mathbf{v})$ in termini di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

7. Consideriamo il campo $\mathbb{Z}_2$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{Z}_2^3$. Verificare che la trasformazione

$$T : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$$

definita da $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, (modulo 2) è lineare. Calcolare il nucleo di T e verificare che $\ker T$ è un sottospazio di $\mathbb{Z}_2^3$.