18 novembre 2011

1. Verificare se le seguenti applicazioni sono lineari. In caso affermativo determinarne nucleo e immagine.

(1) $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$.

(2) $d : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}$ definita da $d \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

(3) $r : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ con $r(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (\sqrt[3]{a})x^2 - b^2x + c$.

(4) $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $s(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia $T : M(3 \times 2) \to M(3 \times 2)$ l'applicazione definita da

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Verificare che T è lineare. Calcolare $T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Determinare nucleo e immagine di T.

3. Se una matrice A non è quadrata dimostrare che le righe oppure le colonne di A sono linearmente dipendenti.

4. Abbiamo visto che data una matrice A $m \times n$ si può definire l'applicazione lineare $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dimostriamo ora che qualunque sia l'applicazione $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, essa è indotta da qualche matrice A.

Mostriamo con un esempio ciò che accade in generale.

Sia $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ una applicazione lineare data da equazioni

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ y_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \end{cases}$$

è allora chiaro che $T = T_A$ dove A è la matrice 4×5

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}$$

Questa matrice si chiama la matrice standard o canonica di T. Osserviamo che la matrice standard si può costruire prendendo la matrice che ha per colonne i trasformati dei vettori della base standard o canonica di $\mathbb{R}^5$.

5. Determinare la matrice standard della rotazione del piano di un angolo di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario (intorno all'origine).

Soluzione

Non avendo a disposizione le equazioni qui bisogna ricorrere all'osservazione del punto precedente che qui ripetiamo: per avere la matrice standard della trasformazione prendiamo i vettori della base canonica di $\mathbf{V}_2 = \mathbb{R}^2$, cioè $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ e calcoliamo $R_{\frac{\pi}{4}}(\vec{i}) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ e $R_{\frac{\pi}{4}}(\vec{j}) = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. Possiamo così formare la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

in accordo con quanto visto a suo tempo a lezione.

6. Ci domandiamo ora se sia possibile ottenere una matrice che in qualche senso analogo rappresenti anche delle trasformazioni lineari tra spazi vettoriali diversi da $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo ad esempio l'operatore di derivazione

$$D : \mathbb{P}_5 \to \mathbb{P}_5$$

che associa ad ogni polinomio la sua derivata.

Fissiamo una **base ordinata** $\mathcal{B}$ di $\mathbb{P}_5$. Una base naturale è ad esempio $\mathcal{B} = \{x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, 1\}$.

(Questa base è considerata differente dalla base $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$).

In questo modo possiamo associare ad ogni polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ il vettore di $\mathbb{R}^6$

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Possiamo così interpretare l'operatore di derivazione $\bar{D}$ mediante un corrispondente operatore da $\mathbb{R}^6$ a $\mathbb{R}^6$, come segue

$$D(x^5) = 5x^4 \text{ corrisponde a } \bar{D} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente

$$D(x^4) = 4x^3 \text{ corrisponde a } \bar{D}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$D(x^3) = 3x^2 \text{ corrisponde a } \bar{D}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x \text{ corrisponde a } \bar{D}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 \text{ corrisponde a } \bar{D}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$D(1) = 0 \text{ corrisponde a } \bar{D}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La matrice di $\bar{D}$ è allora

$$A = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\5&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Diciamo allora che la matrice A **rappresenta** l'operatore D nel senso che se prendiamo, ad esempio, il polinomio $x^3 - x^2 + 1$ e ne calcoliamo la derivata ottenendo $3x^2 - 2x$, otteniamo lo stesso risultato se applichiamo la seguente procedura:

(1) Trasformiamo $x^3 - x^2 + 1$ in coordinate rispetto alla base ordinata fissata

ottenendo nell'esempio

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Moltiplichiamo il vettore così ottenuto per la matrice A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ottenendo così $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) Reinterpretiamo il vettore ottenuto come polinomio ottenendo di nuovo $3x^2 - 2x$.

7. La matrice trovata nel punto precedente dipende fortemente dalla base che abbiamo fissata. Per esercizio,

(1) determinare la matrice che rappresenta D rispetto alla base

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}.$$

(2) determinare la matrice che rappresenta D rispetto alla base

$$\{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4, (x+1)^5\}.$$

8. Dimostrare che se $S : V \to W$ e $T : W \to U$ sono due applicazioni lineari allora $T \circ S : V \to U$ è ancora una applicazione lineare.

9. Dimostrare che se $S : V \to W$ è una trasformazione lineare e U è un sottospazio di V allora $S(U) = \{w \in W | w = S(u) \text{ per qualche } u \in U\}$ è un sottospazio di W. Dimostrare che $\dim S(U) \leq \dim U$.

10. Dimostrare che se $S : V \to W$ è una trasformazione lineare e se U è un sottospazio di W allora $S^{-1}(U) = \{v \in V | S(v) \in U\}$ (immagine inversa di U) è un sottospazio di V.