21 novembre 2011

1. Abbiamo visto che se A è una matrice $m\times n$ e T_A è la trasformazione lineare da essa determinata o, come si dice, "indotta" allora $\ker T_A = null(A)$ e $\mathrm{im}T_A = \mathrm{im}A$. Il teorema di Rouché-Capelli implica che

$$n = \dim(\mathrm{im}A) + \dim(null(A))$$

e quindi anche

$$n = \dim(\mathrm{im}T_A) + \dim(\ker(T_A))$$

In effetti questa relazione vale in ambito più generale: Si dimostra infatti:

Teorema delle dimensioni. *Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare. Se entrambi i sottospazi* $\ker T$ *e imT hanno dimensione finita, allora anche V ha dimensione finita e si ha:*

$$\dim V = \dim(imT) + \dim(\ker T)$$

Dimostrazione. Dimostrazione Facoltativa, v. ad esempio Teorema 5.3.23 Nicholson.

2. Se A è una fissata matrice $n \times n$, siano

$$U = \{B \in M(m \times n)|BA = 0\}, W = \{BA|B \in M(m \times n).$$

Usando il Teorema delle dimensioni dimostrare che U e W sono entrambi sottospazi di $M(m \times n)$ e che si ha $\dim U + \dim W = mn$

Soluzione. Definiamo una applicazione

$$T : M(m \times n) \to M(m \times n)$$

ponendo $T(B) = BA$. Questa è una applicazione lineare, infatti:

$$T(B_1 + B_2) = (B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A = T(B_1) + T(B_2)$$

inoltre

$$T(kB) = (kB)A = k(BA) = kT(B)$$

Osserviamo ora che U è precisamente il nucleo di T e che W è precisamente l'immagine di T, quindi essi sono sottospazi. Inoltre il Teorema delle dimensioni implica che

$$\dim M(m \times n) = \dim U + \dim W$$

La conclusione si ha infine osservando che $\dim M(m \times n) = mn$.

3. Sia P il sottoinsieme di $\mathbb{P}_n$ costituito dai polinomi pari (cioè tali che $p(-x) = p(x)$) e D il sottoinsieme dei polinomi dispari ($p(-x) = -p(x)$). Usare il Teorema delle dimensioni per dimostrare che P e D sono sottospazi e che

$$\dim P + \dim D = n + 1.$$

4. Usando il Teorema delle dimensioni dimostrare che ogni matrice quadrata $n \times n$ A può essere scritta come $A = B^T - 3B$ per una opportuna matrice quadrata B. (Ad esempio, se $n = 2$ si può verificare direttamente che

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{-3c-b}{8} \\ \frac{-c-3b}{8} & -\frac{d}{2} \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \frac{-c-3b}{8} \\ \frac{-3c-b}{8} & -\frac{d}{2} \end{pmatrix})$$