22 novembre 2011

1. Supponiamo di avere una trasformazione lineare tra due spazi vettoriali: $T : V \to W$ e supponiamo fissate due basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{D}$ di W. Possiamo allora costruire il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_M"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "C_{\mathcal{D}}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Questo va interpretato come segue. Consideriamo la matrice M che ha per colonne le coordinate rispetto alla base $\mathcal{D}$ dei vettori della base $\mathcal{B}$:

$$M = (C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_1), C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_2), \ldots, C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_n))$$

La trasformazione porta $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{w} = T(\mathbf{v})$. Possiamo però prima prendere le coordinate di $\mathbf{v}$: $C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$, moltiplicare per la matrice M le coordinate così ottenute, e quindi reinterpretare il risultato come coordinate del vettore $\mathbf{w}$ rispetto a $\mathcal{D}$.

In altre parole abbiamo: $T_M \circ C_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{D}} \circ T$ o equivalentemente: $T = C_{\mathcal{D}}^{-1} \circ T_M \circ C_{\mathcal{B}}$.

2. Vedere Esercizio 6. della lezione 40.

3. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{P}_2$ l'applicazione lineare definita da $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (a+b)+(b+c)x+c+a)x^2$. Determinare la matrice che rappresenta T rispetto alle basi (ordinate) $\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $\mathcal{D} = \{x^2, x, 1\}$.

Soluzione.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "C_{\mathcal{E}}"'] & \mathbb{P}_2 \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "T_M"] & \mathbb{R}^3 \arrow[u, "C_{\mathcal{D}}^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Per calcolare la matrice M che rappresenta questa applicazione procediamo per passi.

(1) Prendiamo il primo vettore della base di $\mathcal{E}$, cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e consideriamo le sue coordinate: $C_{\mathcal{E}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (in questo caso $C_{\mathcal{E}}$ è l'identità).

(2) prendiamo lo stesso vettore e lo trasformiamo secondo l'applicazione T:
$$T(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}) = 1 + x^2.$$

(3) Prendiamo le coordinate $C_{\mathcal{D}}(1+x^2) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

(4) Queste ultime costituiscono la prima colonna della matrice desiderata.

(5) Ripetiamo dal punto (1) per ogni rimanente vettore della base $\mathcal{B}$.

Otteniamo $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, la matrice richiesta.

4. Sia $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare che calcola un dato polinomio nel fissato numero $a \in \mathbb{R}$. Determinare la matrice che rappresenta C_a rispetto alle basi (ordinate) $\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\}$ e $\mathcal{D} = \{1\}$.

Soluzione.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}_3 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^4 \arrow[r, "T_M"] & \mathbb{R} \arrow[u, "C_{\mathcal{D}}"']
\end{tikzcd}$$

Per calcolare la matrice M che rappresenta questa applicazione procediamo per passi.

(1) Prendiamo il primo vettore della base di $\mathcal{B}$, cioè x^3 e consideriamo le sue coordinate: $C_{\mathcal{B}}(x^3) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

(2) prendiamo lo stesso vettore e lo trasformiamo secondo l'applicazione T: $T(x^3) = a^3$.

(3) Prendiamo le coordinate $C_{\mathcal{D}}(a^3) = a^3$.

(4) Queste ultime costituiscono la prima colonna della matrice desiderata.

(5) Ripetiamo dal punto (1) per ogni rimanente vettore della base $\mathcal{B}$.

Otteniamo $M = (a^3, a^2, a, 1)$, la matrice richiesta.

5. Calcolare la matrice dell'operatore lineare di trasposizione su $M(2\times 2)$ rispetto alla base canonica.

Soluzione Nel caso di un endomorfismo, come qui, possiamo scegliere la stessa base per $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, in questo esercizio ci si chiede di scegliere la base canonica: $\mathcal{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. In questo caso otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Verificare il risultato applicandolo alla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

per ottenere

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

6. Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ è una base di uno spazio vettoriale V e $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_n\}$ è un'altra base di V consideriamo la matrice

$$P = (C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_1), C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_2), \dots, C_{\mathcal{D}}(\mathbf{b}_2))$$

che ha per colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{D}$. Abbiamo allora che

$$C_{\mathcal{D}}(\mathbf{v}) = PC_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$$

ossia, le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathcal{D}$ si possono calcolare moltiplicando le coordinate rispetto a $\mathcal{B}$ per la matrice P, che si dice, per questo, **matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$** e si scrive, più precisamente: $P = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$

Questa può essere ottenuta con il metodo degli esercizi precedenti come la matrice dell'applicazione identica rispetto alle due basi diverse.

7. Come esempio del punto precedente: Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate in $M(2\times 2)$ da $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11}+E_{12}, E_{11}+E_{12}+E_{21}, E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}\}$ a $\mathcal{D} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. (In alternativa, questo esercizio richiede di scrivere la matrice dell'applicazione identica su $M(2 \times 2)$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$).

Soluzione

$$P = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{D} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ a $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11} + E_{12}, E_{11} + E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}\}$ e verificare che si trova la matrice inversa di quella dell'esercizio precedente.

In generale,

$$P^{-1}_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$$

9. Usare la matrice dell'esercizio precedente per ottenere le coordinate della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. **Soluzione** Si verifica che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d \end{pmatrix}$$

ed infatti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (b-c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10. (Questo esercizio rivede e corregge l'Esempio 3.9.3 del libro di testo a pagina 46. Confronta anche la pagina 64. Nel testo a pagina 46 $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono scambiati.)

Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\}$$

alla base canonica

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Soluzione La matrice richiesta è

$$M = (C_{\mathcal{E}}(\mathbf{d}_1), C_{\mathcal{E}}(\mathbf{d}_2)) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che il nostro compito in questo caso è facilitato dal fatto che la base $\mathcal{E}$ è la base canonica e che quindi $C_{\mathcal{E}}$ è in questo caso l'identità. Calcolare, secondo la definizione, la matrice del cambiamento inverso, sarebbe per esempio, più laborioso. Tuttavia in base a risultati generali sappiamo che la matrice del cambiamento inverso è l'inversa della matrice di prima. Nel nostro esempio: Scrivere la matrice del cambiamento di coordinate dalla base canonica

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

alla base

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\}$$

Otteniamo

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$