23 novembre 2011

1. Vogliamo capire come cambia la matrice di un endomorfismo al variare della base fissata. Supponiamo dunque di avere un endomorfismo $T : V \to V$ di uno spazio V di dimensione n. E sia $M = M_{\mathcal{B}}$ la matrice che rappresenta T (brevemente diremo: la matrice di T) rispetto alla base $\mathcal{B}$ e $M' = M_{\mathcal{D}}$ l'analoga matrice rispetto alla base $\mathcal{D}$. Per metterle in relazione applichiamo il seguente schema:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_M"] \arrow[d, "P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}"'] & \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "T_{M'}"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}"'] \end{tikzcd}$$

A parole, la situazione descritta dallo schema è la seguente: Partendo da $\mathbb{R}^n$ in alto a sinistra possiamo moltiplicare il vettore dato per la matrice M ottenendo così il vettore trasformato nello spazio in altro a destra. Oppure, prima di trasformare il vettore, cambiamo le sue coordinate dalla base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{D}$, in questo modo ci spostiamo in basso a sinistra e poi trasformiamo con la matrice M', e andiamo a finire in basso a destra. Se ora riportiamo questo vettore in coordinate rispetto a $\mathcal{B}$, risalendo in alto a destra, abbiamo ottenuto lo stesso risultato in due modi diversi. Se $\mathbf{v} \in V$ è un arbitrario vettore di V abbiamo:

$$MC_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}M'P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}C_{\mathcal{B}}(\mathbf{v})$$

Abbiamo infatti il seguente

Teorema. *Se $T : V \to V$ è un endomorfismo e $\dim V = n$. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ due basi ordinate di V allora le matrici M e M' sono* **simili***, vale a dire sono legate dalla relazione seguente, se $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{D}}$ abbiamo*

$$M' = P^{-1}MP$$

2. Sia $P_r : V_2 \to V_2$ l'applicazione lineare che calcola la proiezione ortogonale su una retta r. Fissiamo un sistema di riferimento su V_2 in modo che la retta r sia la bisettrice di equazione $y = x$. Rispetto a queste coordinate l'operatore P_r ha matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Se invece fissiamo le coordinate in modo che la retta r coincida con l'asse delle x la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste due matrici, per il teorema sono simili. Sia infatti $\mathcal{E} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ la prima base e $\mathcal{D} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ le due basi di $\mathbb{R}^2$ e sia

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{D}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. Sia $T : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2)$ l'endomorfismo dato dalla trasposizione.

(1) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica di $M(2\times 2)$ (v. esercizio 5 lez. 42).
(2) Scrivere la matrice di T rispetto alla base $\mathcal{B}$ dell'esercizio 7 della lez. 42.
(3) Verificare che le due matrici così ottenute sono simili.

4.

(1) Dimostrare che due matrici simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
(2) Due matrici simili hanno la stessa traccia.
(3) Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
(4) Dare un esempio di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili.

5. In base ai risultati dell'esercizio precedente è possibile definire il determinante, la traccia ed il polinomio caratteristico di un endomorfismo come il determinante, traccia e polinomio caratteristico di una qualunque matrice che rappresenta l'endomorfismo.

(1) Calcolare il polinomio caratteristico della rotazione del piano intorno alla origine di un angolo θ.
(2) Calcolare il polinomio caratteristico dell'operatore di proiezione ortogonale di un vettore del piano sulla retta di equazione $y = mx$.
(3) Calcolare il polinomio caratteristico dell'operatore dell'esercizio 3.