

24 novembre 2011

1. Sia $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$ l'endomorfismo dato dalla trasposizione. La matrice di T rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è

$$M_{\mathcal{E}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mentre rispetto alla base $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11}+E_{12}, E_{11}+E_{12}+E_{21}, E_{11}+E_{12}+E_{21}+E_{22}\}$ ha matrice

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per verificare che queste due matrici sono simili usiamo la relazione

$$M_{\mathcal{B}}(T) = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} M_{\mathcal{E}}(T) P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}}$$

Ricordando che $P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = (C_{\mathcal{E}}(\mathbf{b}_1), C_{\mathcal{E}}(\mathbf{b}_2), \dots, C_{\mathcal{E}}(\mathbf{b}_n))$ abbiamo

$$P = P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il calcolo esplicito ora completa la verifica.

2. Definiamo l'applicazione $T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$ ponendo $T(A) = A + kA^T, k \in \mathbb{R}$. Dimostrare che T è un isomorfismo se e solo se $k \neq \pm 1$ esaminando $M_{\mathcal{B}}(T)$ con $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21}, -E_{12} + E_{21}\}$.

Soluzione Calcolo $M_{\mathcal{B}}(T)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esprimo $\begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in coordinate:

$$\begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo $\begin{pmatrix} 1+k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: la prima colonna.

Ripeto per il secondo vettore della base:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1+k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la seconda colonna. E così via:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1+k \\ 1+k & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+k \\ 0 \end{pmatrix}$$

la terza colonna.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1+k \\ 1-k & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1-k \end{pmatrix}$$

la quarta colonna. Allora

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Questa matrice è evidentemente invertibile se e solo se $k \neq \pm 1$ e quindi abbiamo la conclusione.

Osserviamo che nel calcolo di questa matrice è stato necessario risolvere quattro volte un sistema di equazioni lineari che differiscono solo per i termini noti. Si può allora pensare di procedere in maniera sistematica come segue: Considero la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1+k & -1+k \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1+k & 1-k \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In tal modo posso risolvere ad un tempo i quattro sistemi riducendo questa matrice nella sua forma a scala ridotta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1+k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix}$$

Le ultime quattro colonne sono proprio la matrice desiderata.

3. Calcolare la matrice della trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ che si ottiene prendendo un vettore $\mathbf{v}$ proiettandolo ortogonalmente sulla retta $y = x$ e poi ruotandolo di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario.

4. Quanto vale il determinante della proiezione ortogonale? Qual è il polinomio caratteristico della rotazione di $\frac{\pi}{4}$ in senso antiorario? Qual è il determinante della trasformazione di trasposizione su $M(2 \times 2)$?

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ e consideriamo la trasformazione lineare

$$T : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2)$$

che si ottiene ponendo $T(M) = AM$, $M \in M(2 \times 2)$. Dimostrare che la matrice identità non appartiene all'immagine di T . Trovare inoltre una matrice non nulla M per cui $AM = 0$. Quanto vale $\det T$?