25 novembre 2011

1. Abbiamo generalizzato la nozione di piano e di spazio tridimensionale ad uno spazio n-dimensionale, tranne per un aspetto: la nozione di ortogonalità che è strettamente legata alla nozione di distanza. Studieremo ora la nozione di **spazio vettoriale euclideo** intendendo con questo uno spazio vettoriale in cui sia definito un prodotto scalare.

Si dice spazio vettoriale euclideo uno spazio vettoriale reale in cui è definita una funzione:

$$V \times V \to \mathbb{R}$$

che ad ogni coppia ordinata di vettori $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ di V associa uno scalare indicato con $(\mathbf{u}|\mathbf{v})$ con le seguenti proprietà:

(1) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = (\mathbf{v}|\mathbf{u})$, (simmetria);
(2) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}|\mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}|\mathbf{v}_2)$;
(3) $(k\mathbf{u}|\mathbf{v}) = k(\mathbf{u}|\mathbf{v})$;
(4) $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) \geq 0$ ed $(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = 0 \iff \mathbf{v} = 0$ (positività)

qualunque siano i vettori e qualunque sia lo scalare k.

Questa funzione si dice prodotto scalare definito positivo su V.

2. Ad esempio

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

definito come segue: se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$(X|Y) = X^T Y = (x_1, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

è il prodotto scalare standard che generalizza il solito prodotto scalare di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

3. Nello spazio vettoriale $M(n \times n)$ delle matrici quadrate reali di ordine n definiamo un prodotto scalare con

$$(A|B) = tr(AB^T)$$

Verifichiamo le proprietà necessarie:

$$(A|B) = tr(AB^T) = tr((AB^T)^T) = tr(BA^T) = (B|A)$$

$$(A_1 + A_2|B) = tr[(A_1 + A_2)B^T] = tr[A_1 B^T + A_2 B^T] =$$
$$tr(A_1 B^T) + tr(A_2 B^T) = (A_1|B) + (A_2|B)$$

$$(kA|B) = tr(kAB^T) = ktr(AB^T) = k(A|B)$$
$$(A|A) = tr(AA^T) = \sum_{ij} a_{ij}^2 \geq 0$$

inoltre se $(A|A) = 0$ allora $\sum_{ij} a_{ij}^2 = 0$ e quindi $a_{ij} = 0$ cioè $A = 0$.

4. Fissati $n+1$ numeri reali distinti $a_0, a_1, \dots, a_n$ poniamo

$$(p(x)|q(x)) = p(a_0)q(a_0) + \cdots + p(a_n)q(a_n)$$

Verificare che questo è un prodotto scalare su $\mathbb{P}_n$. Se invece di fissare $n+1$ numeri ne avessimo fissati n quali proprietà delle quattro sono vere e quali false? Se invece fissassimo $n+2$ numeri?

5. (Per chi conosce le necessarie nozioni di analisi). Nello spazio vettoriale delle funzioni continue definite nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, denotato $C[a, b]$, poniamo

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

Verificare che questo è un prodotto scalare su $C[a, b]$.

6. Calcolare, nei rispettivi spazi, le seguenti norme:

(1)

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|$$

(2)

$$\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \|$$

(3)

$$\|x^2 + x + 1\|$$

(4)

$$\| \sin x\|$$

in $C[-\pi, \pi]$

7. Verificare che ponendo

$$(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = 2xx' + 3yy'$$

si ottiene un prodotto scalare. Disegnare la "circonferenza" $\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^2 = 1$.

8. Verificare che ponendo

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) = 2xx' + xy' + yx' + 2yy'$$

si ottiene un prodotto scalare. Calcolare la norma di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. È un versore? Determinare un vettore di $\mathbb{R}^2$ "perpendicolare" a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.