

28 novembre 2011 Ortogonalità

1. Osserviamo che il prodotto scalare standard o canonico su $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come segue (nel seguito useremo $n = 2$ per semplicità): se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^T \mathbf{w} = (xy) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

Si può pensare di ottenere altri "prodotti scalari" definendo

$$(\mathbf{v}|\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T C \mathbf{w} = (xy) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

scegliendo una matrice C opportuna.

È facile verificare che definire

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v}^T C \mathbf{w}$ dà sempre una applicazione *bilineare* cioè lineare nelle due "variabili" (si parla in questo caso di **forma bilineare**).

Si verifica anche che tale forma è simmetrica, cioè:

$$\mathbf{v}^T C \mathbf{w} = \mathbf{w}^T C \mathbf{v}$$

quando C è simmetrica.

Si dimostra infine che la forma bilineare è definita positiva precisamente quando la matrice C è definita positiva, intendendo con ciò le seguenti due condizioni equivalenti tra loro:

- (1) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ha determinante positivo e inoltre $a > 0, b > 0$;
- (2) entrambi gli autovalori sono positivi.

Se scegliamo una matrice C simmetrica e invertibile la corrispondente forma bilineare è allora *non degenera* nel senso che soddisfa la seguente proprietà:

$$\mathbf{v}^T C \mathbf{w} = 0 \text{ per ogni } \mathbf{w} \iff \mathbf{v} = 0$$

2.

Teorema. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ è un insieme ortogonale di vettori (non nulli) allora essi sono indipendenti e si ha

$$\|\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_k\|^2 = \|\mathbf{e}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{e}_k\|^2$$

(generalizzazione del Teorema di Pitagora).

Dimostrazione. Consideriamo la combinazione lineare

$$\sum_i a_i \mathbf{e}_i = 0$$

moltiplicando ambo i membri per $\mathbf{e}_j$ otteniamo

$$\left(\sum_i a_i \mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j\right) = a_j \|\mathbf{e}_j\|^2$$

e quindi $a_j = 0$. Questo vale qualunque sia l'indice j e pertanto abbiamo dimostrato l'indipendenza.

Per la seconda parte calcoliamo

$$\|\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_k\|^2 = (\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_k | \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1) + \dots + (\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k)$$

in quanto i prodotti "misti" $(\mathbf{e}_i | \mathbf{e}_j) = 0$ per l'ortogonalità.

3.

Teorema dello sviluppo di Fourier. Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k\}$ è una base ortogonale di V allora ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si può scrivere come:

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{e}_1\|^2} \mathbf{e}_1 + \dots + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{e}_n)}{\|\mathbf{e}_n\|^2} \mathbf{e}_n$$

Dimostrazione. Basta prendere l'espressione $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_n \mathbf{e}_n$, sicuramente esistente, e calcolare $(\mathbf{v} | \mathbf{e}_1)$ trovando $(\mathbf{v} | \mathbf{e}_1) = a_1 \|\mathbf{e}_1\|^2$ da cui si ricava a_1 . Analogamente per gli altri coefficienti.

4.Procedimento di Gram-Schmidt Per costruire una base ortogonale esiste un procedimento che, a partire da una base qualunque, costruisce, passo passo, una base ortogonale come segue.

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ una qualunque base di V , costruiamo una nuova base prendendo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1 | \mathbf{e}_1)} \mathbf{e}_1 - \frac{(\mathbf{v}_3, \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_2 | \mathbf{e}_2)} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

e così via.

È facile verificare che i vettori $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ così ottenuti sono una base ortogonale ed inoltre

$$\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$$

per ogni $k = 1, \dots, n$.

5. Determinare una base ortogonale dello spazio delle colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione. Si può verificare che il rango di A è tre. Dunque le tre colonne formano una base di $C(A)$, sottospazio di $\mathbb{R}^4$. Applichiamo Gram-Schmidt:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Per semplicità di calcolo prendiamo

$$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ora calcoliamo

$$\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{15}{20} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Come prima possiamo prendere

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La base cercata è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui possiamo, volendo, ricavare la base ortonormale

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Determinare una base ortogonale dello spazio delle righe della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$