

29 novembre 2011

1.

Teorema: Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, V uno spazio euclideo, allora

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Dimostrazione. Se uno dei due vettori è nullo non c'è niente da dimostrare. Supponiamo dunque che i vettori siano entrambi non nulli e poniamo $a = \|\mathbf{u}\|$ e $b = \|\mathbf{v}\|$. Chiaramente $a > 0, b > 0$. Consideriamo i vettori $b\mathbf{u} - a\mathbf{v}$ e $b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \|b\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 &= (b\mathbf{u} - a\mathbf{v}|b\mathbf{u} - a\mathbf{v}) = b^2(\mathbf{u}|\mathbf{u}) - 2ab(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + a^2(\mathbf{v}|\mathbf{v}) = \\ &= a^2b^2 - 2ab(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + a^2b^2 = 2a^2b^2 - 2ab(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \\ &= 2ab(ab - (\mathbf{u}|\mathbf{v})) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che, essendo la norma di un vettore necessariamente maggiore o uguale a zero,

$$(ab - (\mathbf{u}|\mathbf{v})) \geq 0 \iff ab \geq (\mathbf{u}|\mathbf{v})$$

Ripetendo il calcolo con il vettore $b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$ otteniamo

$$(ab + (\mathbf{u}|\mathbf{v})) \geq 0 \iff (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \geq -ab$$

In conclusione dunque:

$$-ab \leq (\mathbf{u}|\mathbf{v}) \leq ab$$

o equivalentemente

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

ricordando la definizione di a e b . $\square$

Corollario: Disuguaglianza Triangolare. Nelle ipotesi del teorema vale anche la seguente:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}|\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

da cui la conclusione estraendo le radici quadrate. $\square$

2. Scrivere la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz esplicitamente per i seguenti spazi euclidei:

- (1) $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard;
- (2) $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare definito dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$;
- (3) $M(2 \times 2)$ con il prodotto scalare definito da $\text{tr}(AB^T)$.

3. Nello spazio $M(2 \times 2)$ con il prodotto scalare definito da $\text{tr}(AB^T)$ calcolare il coseno dell'angolo tra le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare la distanza tra queste due matrici, usando la definizione di distanza in uno spazio euclideo come segue:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

4.

Teorema della proiezione. Se U è un sottospazio di uno spazio euclideo V e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ è una base ortogonale di U , allora per ogni $\mathbf{v} \in V$ il vettore

$$\mathbf{p} = \text{proj}_U(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{e}_1)}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 + \dots + \frac{(\mathbf{v}|\mathbf{e}_k)}{\|\mathbf{e}_k\|^2}\mathbf{e}_k$$

è un vettore di U e $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ è ortogonale a U (cioè ortogonale a tutti i vettori di U), inoltre l'applicazione

$$P = \text{proj}_U : V \rightarrow V$$

in tal modo definita è lineare ed ha $\text{im}P = U$, $\ker P = U^\perp$, dove $U^\perp = \{\mathbf{v} \in V | (\mathbf{v}|\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}$

Lo spazio $U^\perp = \{\mathbf{v} \in V | (\mathbf{v}|\mathbf{u}) = 0, \forall \mathbf{u} \in U\}$ si dice **complemento ortogonale** di U .

Dimostrazione Facoltativa. Vedi ad esempio Nicholson Teorema 5.7.20.

5. Calcolare la proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sullo spazio delle colonne

della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(v. Lezione 46).

Cenni di soluzione Nella lezione precedente abbiamo calcolato una base ortogonale di $C(A)$. Usando il Teorema della Proiezione possiamo allora calcolare il risultato cercato trovando

$$\begin{pmatrix} \frac{13}{15} \\ \frac{6}{5} \\ \frac{11}{15} \\ \frac{16}{15} \end{pmatrix}.$$

6. Verificare che nell'esercizio precedente si ha $\mathbf{v} - \mathbf{p} \in U^\perp$

Cenni di soluzione Basta verificare che il prodotto scalare di $\mathbf{v} - \mathbf{p}$ con i vettori di una base di U sia sempre zero.

7. Scrivere la matrice standard dell'applicazione lineare di proiezione ortogonale sullo spazio delle colonne della matrice dell'esercizio **5**. Trovare il polinomio caratteristico, gli autovalori, gli autovettori per essa e determinare una forma diagonale. Verificare che la matrice così ottenuta è simmetrica e idempotente.

8. Data la matrice simmetrica $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ verificare che A è idempotente. Verificare che A è la matrice di qualche proiezione, quale? Verificare inoltre che se A è idempotente anche la matrice $B = I - A$ è idempotente (I è la matrice identità). Quale proiezione corrisponde a $I - A$?