30 novembre 2011

1. Calcolare il complemento ortogonale dello spazio delle colonne della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e verificare che esso coincide con $null(A^T)$

2.

Teorema di approssimazione. *Se U è un sottospazio di uno spazio euclideo V e $v \in V$ allora il vettore $\mathbf{p} = proj_U(\mathbf{v})$ è il vettore di U che meglio approssima $\mathbf{v}$ cioè tale che*

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{p}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

per ogni $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{p}$.

Dimostrazione. Qualunque sia $\mathbf{u} \in U$, possiamo scrivere $\mathbf{v} - \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \mathbf{p} + \mathbf{p} - \mathbf{u}) = (\mathbf{v} - \mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{u})$. Ora $\mathbf{v} - \mathbf{p} \in U^\perp$ per il Teorema della proiezione, e $\mathbf{p} - \mathbf{u} \in U$ in quanto differenza di due vettori di U. Allora il Teorema di Pitagora implica

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{p} - \mathbf{u}\|^2$$

essendo $\|\mathbf{p} - \mathbf{u}\| > 0$ perché per ipotesi $\mathbf{p} \neq \mathbf{u}$ allora

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{v} - \mathbf{p}\|^2$$

come richiesto $\square$

3.Applicazione allo studio di sistemi incompatibili Sappiamo che un sistema $AX = B$ è compatibile se e solo se $B \in C(A) = imA$. Supponiamo quindi che $AX = B$ non abbia soluzione e che quindi $B \notin C(A)$. Cerchiamo un vettore Z per cui $\|B - AZ\|$ sia la più piccola possibile. Per il Teorema di Approssimazione sappiamo che $proj_{C(A)}(B)$ è il vettore che cerchiamo. Possiamo scrivere $proj_{C(A)}(B) = AZ$ (tutti i vettori di imA sono del tipo AZ). Per il Teorema della Proiezione $B - AZ \in C(A)^\perp = null(A^T)$. Abbiamo allora che

$$A^T(B - AZ) = 0$$

ossia

$$A^T AZ = A^T B \tag{1}$$

in altre parole il vettore Z che cerchiamo è soluzione del sistema (1) (Equazioni normali).

4. Trovare le soluzioni approssimate di

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases}$$

Soluzione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

e

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Allora

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 & -16 \\ -6 & 6 & 6 & 16 \\ -6 & 6 & 90 & 72 \\ -16 & 16 & 72 & 80 \end{pmatrix}$$

mentre

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 33 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Risolviamo infine le equazioni normali $A^T AZ = A^T B$. Riducendo la matrice

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 & -16 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & 16 & -1 \\ -6 & 6 & 90 & 72 & 33 \\ -16 & 16 & 72 & 80 & 20 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & \frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{17}{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} s + 2t + \frac{4}{7} \\ s \\ -\frac{2}{3}t + \frac{17}{42} \\ t \end{pmatrix}$$

5. Consideriamo i seguenti dati empirici ottenuti misurando il diametro del tronco di querce di varie età.

Età	Diametro in cm
11	2.5
12	2.5
15	3.8
28	15.2
45	22.9
52	26.7
57	27.9
75	41.9
81	24.1
88	20.3
93	31.8
97	31.8

Riportando questi dati su un grafico si ottiene la figura 1 (Diario delle Lezioni, Lez. N 48). È chiaro l'andamento dei dati che indicano che al crescere dell'età il diametro del tronco aumenta in maniera lineare. Tuttavia è anche chiaro che ci sono eccezioni alla regola. Volendo comunque stimare, ad esempio, il diametro di una quercia di 150 anni di età, la cosa più ragionevole da fare sembra quella di trovare la retta che meglio approssima questi dati e poi dare la stima cercata. Per far ciò cerchiamo una equazione della forma $y = ax + b$ in modo tale che

$$\begin{aligned}
2.5 &= 11a + b \\
2.5 &= 12a + b \\
3.8 &= 15a + b \\
15.2 &= 28a + b \\
22.9 &= 45a + b \\
26.7 &= 52a + b \\
27.9 &= 57a + b \\
41.9 &= 75a + b \\
24.1 &= 81a + b \\
20.3 &= 88a + b \\
31.8 &= 93a + b \\
31.8 &= 97a + b
\end{aligned}$$

Consideriamo allora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 12 & 1 \\ 15 & 1 \\ 28 & 1 \\ 45 & 1 \\ 52 & 1 \\ 57 & 1 \\ 75 & 1 \\ 81 & 1 \\ 88 & 1 \\ 93 & 1 \\ 97 & 1 \end{pmatrix}$$

e la colonna

$$B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 3.8 \\ 15.2 \\ 22.9 \\ 26.7 \\ 27.9 \\ 41.9 \\ 24.1 \\ 20.3 \\ 31.8 \\ 31.8 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$$A^T A = \begin{pmatrix} 47240 & 654 \\ 654 & 12 \end{pmatrix}$$

e

$$A^T B = \begin{pmatrix} 17472.3 \\ 251.4 \end{pmatrix}$$

Il sistema che dobbiamo risolvere è allora

$$\begin{cases} 47240a + 654b = 17472.3 \\ 654a + 12b = 251.4 \end{cases}$$

Troviamo $a = 0.32517, b = 3.22822$ quindi l'equazione cercata è

$$y = 0.32517x + 3.22822$$

Da qui possiamo dare una stima per una quercia di 150 anni:

$$y = 0.32517(150) + 3.22822 = 52.0037cm$$