1 dicembre 2011

1.

Proposizione. Sia A una matrice $n \times n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti, e $X_1, \dots, X_k$ autovettori ordinatamente di quegli autovalori. Allora l'insieme

$$\{X_1, \dots, X_k\}$$

è indipendente.

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Se $k = 1$ la proposizione è vera perché in tal caso abbiamo un unico vettore non nullo e quindi indipendente. Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per $k-1$ autovettori relativi ad autovalori distinti e consideriamo la combinazione lineare seguente:

$$(1) \quad a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k = 0$$

Moltiplichiamo (1) per A in ambo i membri:

$$A(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_k X_k) = A0$$

$$a_1 A X_1 + a_2 A X_2 + \dots + a_k A X_k = 0$$

$$(2) \quad a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + \dots + a_k \lambda_k X_k = 0$$

D'altra parte se moltiplichiamo (1) per λ_1 abbiamo

$$(3) \quad a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_1 X_2 + \dots + a_k \lambda_1 X_k = 0$$

Sottraendo abbiamo

$$\begin{aligned} a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_2 X_2 + \dots + a_k \lambda_k X_k - (a_1 \lambda_1 X_1 + a_2 \lambda_1 X_2 + \dots + a_k \lambda_1 X_k) = \\ = a_2 (\lambda_1 - \lambda_2) X_2 + \dots + a_k (\lambda_1 - \lambda_k) X_k = 0 \end{aligned}$$

ottenendo così una combinazione lineare di $k-1$ autovettori relativi ad autovalori distinti che sono indipendenti per ipotesi induttiva. Di conseguenza $a_2 = \dots = a_k = 0$ e quindi anche $a_1 = 0$. $\square$

La proposizione precedente garantisce quindi che se una matrice ha n autovalori distinti e prendiamo n corrispondenti autovettori allora essi sono indipendenti e quindi la matrice P che ha questi vettori come colonne sarà invertibile.

Tuttavia essa garantisce l'invertibilità della matrice P anche nel caso di autovalori ripetuti. Supponiamo ad esempio, tanto per fissare le idee, che una matrice di ordine 6 abbia tre autovalori distinti: λ_1 di molteplicità algebrica 3, λ_2 di molteplicità algebrica 2, λ_3 di molteplicità algebrica 1. Supponiamo che le molteplicità geometriche coincidano con quelle algebriche (altrimenti la matrice non sarebbe diagonalizzabile). Sarà possibile allora prendere tre autovettori indipendenti per λ_1 , 2 per λ_2 , 1 per λ_3 . Siano essi, ordinatamente, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$. In generale mettere

in uno stesso insieme dei vettori indipendenti non garantisce che l'insieme sia indipendente. In questo caso tuttavia la Proposizione garantisce che ciò accada. Sia infatti

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_6 \mathbf{v}_6 = 0$$

Osserviamo che $a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1$ è un autovettore per λ_1 , $a_4 \mathbf{v}_4 + a_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{w}_2$ è un autovettore per λ_2 , e $a_6 \mathbf{v}_6 = \mathbf{w}_3$ è un autovettore per λ_3 . Per la Proposizione la relazione

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = 0$$

è possibile solo se ciascuno dei vettori $\mathbf{w}_i = 0$, $i = 1, 2, 3$. Abbiamo allora

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3 = 0, \quad a_4 \mathbf{v}_4 + a_5 \mathbf{v}_5 = 0, \quad a_6 \mathbf{v}_6 = 0$$

che, per la supposta indipendenza di questi vettori implica $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$.

2. Abbiamo dunque visto che una matrice è diagonalizzabile precisamente quando è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A . Data l'importanza delle basi ortonormali, ci domandiamo quando sia possibile trovare addirittura una base ortonormale di autovettori. Diciamo subito che in questo caso l'algoritmo di Gram-Schmidt non è utile perché se è pur vero che l'algoritmo fornisce una base ortonormale esso distrugge la proprietà dell'essere autovettori. Ad esempio la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Gli autospazi sono $E_3 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ e $E_1 = \{t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Queste sono due rette del piano ma non sono perpendicolari per cui non c'è modo di avere una base di autovettori che sia anche ortogonale.

3. Diagonalizzare la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Verificare che in questo caso gli autospazi sono ortogonali. Determinare una base ortonormale di autovettori.

4. Due importanti proprietà delle matrici simmetriche reali. Se una matrice A è reale e simmetrica allora:

- (1) I suoi autovalori sono tutti reali;
- (2) Autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali

Verifichiamo la prima proprietà nel caso di matrici di ordine 2. Sia

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica di ordine 2. Allora il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2)$$

la condizione che questo polinomio ammetta solo radici reali è che il discriminante sia non negativo: $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

in quanto somma di due quadrati.

Per la seconda proprietà occorre verificare che, se X e Y sono due autovettori relativi agli autovalori, rispettivamente, λ e μ con $\lambda \neq \mu$ il prodotto scalare $X \cdot Y = 0$. Calcoliamo infatti

$$\begin{aligned} \lambda(X \cdot Y) &= (\lambda X) \cdot Y = (AX) \cdot Y = (AX)^T Y = (X^T A^T) Y = X^T (A^T Y) = \\ &= X^T (AY) = X^T (\mu Y) = \mu (X^T Y) = \mu (X \cdot Y) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato la simmetria di A cioè $A^T = A$.

Insomma abbiamo visto che

$$\lambda(X \cdot Y) = \mu(X \cdot Y)$$

Sottraendo abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda(X \cdot Y) - \mu(X \cdot Y) &= 0 \\ (\lambda - \mu)(X \cdot Y) &= 0 \end{aligned}$$

Essendo per ipotesi $(\lambda - \mu) \neq 0$ deve essere necessariamente $X \cdot Y = 0$.

5. Verificare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori reali. Calcolare gli autospazi e verificare che essi sono tra loro ortogonali. Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A . Determinare una matrice ortogonale P in modo che

$$P^{-1}AP = P^T AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$