30 settembre 2011

1. Contare il numero di inversioni nella permutazione

$$7, 8, 4, 1, 3, 2, 9, 6, 5$$

Soluzione: Consideriamo il 7 e ciascuno dei numeri che lo seguono:

$$(7, 8), (7, 4), (7, 1), (7, 3), (7, 2), (7, 9), (7, 6), (7, 5)$$

ce ne sono 8 e di queste è evidente che in 6 di queste l'ordine è invertito rispetto all'ordine naturale. Allo stesso modo considerando l'8 e i sette numeri che lo seguono troviamo altre 6 inversioni. Procedendo in tal maniera con il 4, 1, etc. possiamo trovare in tutto 19 inversioni. Quindi la permutazione data è di classe dispari.

2. Contare le inversioni (e la classe) di $3, 1, 9, 8, 2, 6, 5, 7, 4$

3. *Se una particolare forma di una espressione algebrica è lunga e capita di frequente, diventa desiderabile introdurre un nome ed un simbolo per essa; e se la forma appartiene ad una famiglia, è altresì desiderabile che i nomi e i simboli di ognuna di esse indichi una tale relazione. Tale terminologia e notazione sono utili non solo per la convenienza nel parlare e nello scrivere, ma aiuta nella stessa scoperta delle proprietà della forma in questione.* (T. Muir, A Treatise on the Theory of Determinants, p.13).

Le espressioni

$$a_1 b_2 - a_2 b_1$$

e

$$a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

sono esempi importanti del concetto espresso sopra. Sono delle forme che ricorrono spesso nei calcoli ed appartengono ad una stessa famiglia. Per esempio, dato il sistema

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y = a_3 \\ b_1 x + b_2 y = b_3 \end{cases}$$

volendo eliminare la x si può moltiplicare la prima equazione per $-b_1$ e la seconda per a_1 in modo da avere il sistema equivalente (cioè avente le stesse soluzioni)

$$\begin{cases} -b_1 a_1 x - b_1 a_2 y = a_3 \\ a_1 b_1 x + a_1 b_2 y = b_3 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni la x viene eliminata e rimane

$$(a_1 b_2 - b_1 a_2) y = 0$$

questa equazione ha soluzione non nulla se e solo $(a_1 b_2 - b_1 a_2) \neq 0$.

Procedendo in egual maniera per il sistema di tre equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = a_4 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = b_4 \\ c_1 x + c_2 y + c_3 z = c_4 \end{cases}$$

si ottiene la condizione che

$$a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \neq 0$$

È chiaro allora che queste espressioni svolgono un ruolo ricorrente e importante per cui è giustificata la definizione di un nome ed un simbolo per esse. Si definiscono *determinanti*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

e

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

4. Calcolare i seguenti determinanti

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ v & w & u \\ t & r & s \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & y \\ 0 & x & y \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 14 \end{vmatrix}$$

5. Risolvere le seguenti equazioni

$$\begin{vmatrix} x & -4 & 1 \\ -6 & 3 & -2 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & x \\ b & x & b \\ x & b & b \end{vmatrix} = 0$$