

3 ottobre 2011

1. Consideriamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

che riscriviamo come $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La scelta di buone notazioni ci permette una economicità di pensiero che favorisce la nascita di idee e la soluzione dei problemi. In questo caso, un sistema di equazioni lineari viene riscritto come una sola equazione matriciale $AX = B$. Viene naturale pensare che se questa fosse una equazione numerica la soluzione sarebbe immediata: $X = \frac{B}{A}$. Ha senso nel contesto delle matrici parlare di divisione? Poiché dividere significa moltiplicare per l'inverso, il problema si riduce al seguente: ha senso considerare l'inversa di A ? Che cosa si debba intendere per inversa di A si capisce per analogia con i numeri reali. A sarà invertibile se esiste una matrice C con la proprietà che $AC = I$ dove I è la matrice identità di ordine n :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che è l'elemento neutro della moltiplicazione e che svolge il ruolo analogo al numero 1 nei reali.

Poiché la moltiplicazione non è commutativa occorre imporre più precisamente

$$AC = CA = I$$

Supponiamo dunque di voler risolvere in tal modo il sistema $AX = B$ dato sopra. Cerchiamo una matrice

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli e confrontando si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_2 + c_4 = 0 \\ 2c_1 - c_3 = 0 \\ 2c_2 - c_4 = 1 \end{cases}$$

abbiamo un sistema di quattro equazioni in quattro incognite che tuttavia è in effetti composto da due sistemi diversi di due equazioni in due incognite. Inoltre i due sistemi differiscono solo per i termini noti:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ 2c_1 - c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 + c_4 = 0 \\ 2c_2 - c_4 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo, ad esempio per eliminazione: sommando le due equazioni si ottiene $3c_1 = 1$ e $3c_2 = 1$ da cui $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$ e sostituendo nelle altre si ottiene $c_3 = \frac{2}{3}$, $c_4 = -\frac{1}{3}$. Abbiamo dunque la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Questa è l'inversa di A . A questo punto possiamo risolvere il sistema richiesto:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Questo metodo di risoluzione è essenzialmente il metodo di Cramer sul quale torneremo in seguito.

Il problema sul quale vogliamo porre l'attenzione adesso è il seguente: come riconoscere se questo metodo di risoluzione è applicabile? Ciò si riduce a chiedersi se e quando la matrice A è invertibile. Vedremo in seguito parecchie condizioni equivalenti per l'invertibilità della matrice A . È facile vedere, ad esempio, che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile. Infatti se volessimo ripetere il ragionamento fatto sopra per cercare una eventuale matrice C ci troveremmo davanti ai sistemi

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 + c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 + c_4 = 0 \\ c_2 + c_4 = 1 \end{cases}$$

che sono evidentemente senza soluzione.

Come vedremo, una condizione necessaria e sufficiente per l'invertibilità di una matrice è che il suo determinante sia diverso da zero. Una condizione molto semplice a dirsi, ma non altrettanto semplice da verificare in pratica, per una matrice che abbia un ordine elevato. Diamo per scontato questo criterio e andiamo allora a dare una formula per la matrice inversa di una matrice invertibile. Occorre, per prima cosa, definire il concetto di *matrice aggiunta* ad una matrice data. Illustriamolo nel caso di matrici 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

sia α_{ij} il complemento algebrico (o cofattore) dell'elemento a_{ij} :

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice che si ottiene da A cancellando la i -esima riga e la j -esima colonna.

Nel nostro esempio $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, etc. si definisce allora $\text{adj}(A)$ la matrice $(\alpha_{ij})^T$.

Nell'ipotesi quindi che $\det(A) \neq 0$ si può verificare che

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

2. Calcolare la matrice aggiunta delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

In ognuno dei quattro casi calcolare $A \cdot \text{adj}(A)$. Speculare su quale debba essere la regola generale per il risultato di $A \cdot \text{adj}(A)$. Cercare di trovare una argomentazione in supporto dell'eventuale congettura.

3. Calcolare l'inversa di quelle matrici dell'esercizio precedente che sono invertibili.

4. Esempio di uso delle proprietà del determinante per semplificare un calcolo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 21 & 0 \\ 4 & -28 & -6 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & -6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \\ = 7 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-3 + 2 + 2 + 3) = 168$$

5. Mostrare che

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ d+y & e & f \\ g+z & h & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & c \\ y & e & f \\ z & h & k \end{vmatrix}$$

6. Verificare che

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$