4 ottobre 2011

1. Metodo di Cramer per sistemi 2×2

Torniamo a considerare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

che riscriviamo come $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abbiamo risolto questo sistema usando la matrice inversa:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Sfruttando la formula per la matrice inversa abbiamo:

$$X = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \cdot B$$

Nel nostro esempio $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ si può verificare, la dimostrazione generale la vedremo in seguito, che

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}$$

Svolgiamolo in generale:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per b_2 e la seconda per $-b_1$ abbiamo

$$\begin{cases} a_1b_2x + b_1b_2y = b_2c_1 \\ -a_2b_1x - b_1b_2y = -b_1c_2 \end{cases}$$

da cui eliminando la y per addizione ricaviamo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

In maniera del tutto simile abbiamo

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

2. Risolvere con il metodo di Cramer, se possibile.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 24 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 17 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 7y - 10 = 0 \\ 7x - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

3. Dire se le seguenti matrici sono in forma a gradini oppure no, dire se sono in forma a gradini ridotta oppure no. Se non lo sono specificare quale regola viene violata e operare con una o più operazioni elementari per portare la forma a gradini.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Scrivere il sistema lineare corrispondente a ciascuna matrice e risolverlo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Risolvere i seguenti sistemi usando il metodo di riduzione di Gauss (o Gauss-Jordan).

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 = -2 \\ 3x_1 + 9x_2 - 21x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 11x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - x_3 = -18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 4x_4 = 16 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 = -3 \end{cases}$$

6. Dimostrare che

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$