

5 ottobre 2011

**1. Rango per minori** Nella risoluzione di un sistema lineare, in che maniera si può decidere quali variabili diventano parametri e quali sono "essenziali"?

La risposta a questa domanda è legata al concetto di rango (per minori o per pivot) di una matrice.

Consideriamo l'esempio:  $AX = B$  dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Risolviamo col metodo di Gauss-Jordan. Consideriamo la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & -6 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci sono due pivot (rango è 2) e si trovano nella prima e nella terza colonna. Ciò significa che la prima variabile,  $x_1$ , e la terza variabile,  $x_3$ , sono dominanti mentre le altre due svolgono la funzione di parametri. È allora facile vedere che le soluzioni del sistema sono:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 2s - 5t \\ s \\ -1 + 3t \\ t \end{pmatrix}$$

al variare di  $t, s \in \mathbb{R}$ .

Risolviamo con il metodo di Cramer. Per prima cosa calcoliamo il rango (per minori) della matrice  $A$ . Dobbiamo trovare l'ordine massimo di minori non nulli. Consideriamo il minore  $M(1, 3|1, 3)$ . Si tratta di un minore principale ottenuto scegliendo la prima e la terza riga e la prima e la terza colonna. Nell'esempio:

$$M(1, 3|1, 3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

D'altra parte i minori orlati:

$$M(1, 2, 3|1, 2, 3) = 0, M(1, 2, 3|1, 3, 4) = 0, M(1, 2, 3|1, 3, 5) = 0$$

e quindi ciò è sufficiente, per il teorema degli orlati, a stabilire che il rango (per minori) di  $A$  è 2. Il fatto che coincida con il rango per pivot non è una coincidenza come vedremo in seguito nel corso.

Fissiamo dunque l'attenzione alla prima e alla terza colonna del sistema, ossia alla prima e alla terza variabile del sistema. Queste sono le variabili dominanti, le altre sono le variabili libere. Poniamo dunque  $x_2 = s, x_4 = t$  e risolviamo con il metodo di Cramer il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 + 2s + t \\ 3x_1 + 5x_3 = 4 + 6s \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2s+t & 2 \\ 4+6s & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = 3 + 2s - 5t$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2s+t \\ 4 & 4+6s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = 3t - 1$$

Le soluzioni quindi sono (ovviamente) le stesse.

**2.** Risolvere con i due metodi il sistema di equazioni seguente:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

(Le soluzioni sono

$$\begin{pmatrix} 3-t \\ -9+4t \\ -2+t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R})$$

**3. Coefficienti binomiali** I coefficienti binomiali sono dei numeri con delle proprietà interessantissime e a volte sorprendenti. Il simbolo  $\binom{n}{k}$  è definito da

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ad esempio,  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10$ . Il nome è dovuto al fatto che questi numeri appaiono come coefficienti nell'espansione delle potenze di un binomio:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

In generale, se  $n$  intero  $n \geq 0$  abbiamo

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dagli esempi appare chiaro lo schema che si ripete:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
 \end{array}$$

Questo è il famoso **Triangolo di Tartaglia**, noto con altri nomi fuori dall'Italia, come ad esempio **"Pascal's Triangle"**. La regola per scrivere la riga successiva corrispondente alla sesta potenza del binomio è quella di partire sempre da 1 e poi sommare due numeri adiacenti per ottenere il numero sottostante. Con questa regola si ottengono, ad esempio per la sesta riga, 1,6,15,20,15,6,1. Tale regola si può scrivere nel modo seguente:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Ciò si può anche verificare facilmente mediante la definizione:

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \\
 &= \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

È importante conoscere l'interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali: il numero  $\binom{n}{k}$  conta il numero di sottoinsiemi di  $k$  elementi di un insieme di  $n$  elementi.

Supponiamo di avere ad esempio 8 oggetti, per esempio 8 quadri da cui ne vogliamo scegliere tre da appendere in soggiorno, indichiamo i quadri con otto lettere

$$A, B, C, D, E, F, G, H.$$

Il primo quadro lo posso scegliere in 8 modi diversi, il secondo in 7 modi, il terzo in 6 modi: in totale  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  modi. Tuttavia questi 336 modi non sono tutti distinti: ad esempio le scelte:

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$$

sono, dal nostro punto di vista equivalenti. Le  $6 = 3!$  diverse permutazioni corrispondono ad un unico sottoinsieme  $\{ABC\}$  di  $\{ABCDEFGH\}$ . Allora i modi distinti di scegliere 3 quadri tra 8 è  $\frac{336}{3!}$  in altre parole poiché  $8 \cdot 7 \cdot 6 = \frac{8!}{5!}$  i modi distinti sono effettivamente

$$\binom{8}{3}$$

(in effetti in inglese il simbolo si legge spesso "8-choose-3" proprio perché si scelgono 3 oggetti tra 8).

Questa interpretazione combinatoria dei coefficienti binomiali può essere sfruttata per dimostrare, ad esempio, che, dato un insieme  $E$  di  $n$  elementi, allora il suo insieme delle parti  $\mathcal{P}(E)$ , cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $E$ , ha  $2^n$  elementi. Ad esempio, se  $E = \{1, 2, 3\}$  allora

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Intenzionalmente, questi otto elementi sono stati elencati scrivendo prima quello (unico) che ha zero elementi, quelli con 1 elemento, quelli con 2 elementi e quello (unico) con 3 elementi. Data l'interpretazione vista sopra è chiaro allora che quanto detto equivale a

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8$$

Si può infatti verificare che sommando le diverse righe del triangolo di Tartaglia si ottiene sempre una potenza di 2.

La dimostrazione di questo fatto è la seguente:

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

Si può parimenti osservare che facendo la somma a segni alterni dei coefficienti su una riga del triangolo di Tartaglia si ottiene sempre zero. Anche questo si vede facilmente considerando

$$0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

**4.** Calcolare quanti minori diversi è possibile estrarre da una matrice  $6 \times 5$ .

Soluzione: Minori di ordine 5 (il massimo possibile): occorre scegliere 5 righe su 6 mentre la scelta delle colonne è obbligata: quindi  $\binom{6}{5} = 6$ .

Minori di ordine 4: Scegliere 4 righe su 5,  $\binom{5}{4}$  modi, e per ciascuna scelta delle righe occorre scegliere 4 colonne su 6, in totale  $\binom{5}{4} \cdot \binom{6}{4} = 75$ .

Minori di ordine 3: Scegliere 3 righe su 5,  $\binom{5}{3}$  modi, e per ciascuna scelta delle righe occorre scegliere 3 colonne su 6, in totale  $\binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} = 200$ .

Minori di ordine 2: Scegliere 2 righe su 5,  $\binom{5}{2}$  modi, e per ciascuna scelta delle righe occorre scegliere 2 colonne su 6, in totale  $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$ .

Minori di ordine 1: Scegliere 1 riga su 5,  $\binom{5}{1}$  modi, e per ciascuna scelta delle righe occorre scegliere 1 colonna su 6, in totale  $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} = 30$  (questo è ovvio giacché i minori di ordine 1 sono i singoli coefficienti).

Totale: 461