Cambiamenti di riferimento nel piano

Stefano Capparelli

November 7, 2012

Abstract

Illustriamo con alcuni esempi il cambiamento di coordinate

1 Cambiamento di base

Siano date due basi ortonormali ordinate di V_2 : $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ e $\mathcal{B}' = (\vec{i'}, \vec{j'})$ e supponiamo che

$$\begin{cases} \vec{i'} = a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{j'} = c\vec{i} + d\vec{j} \end{cases}$$

allora per un generico vettore $\vec{v} \in V_2$ abbiamo

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = v_{x'}\vec{i'} + v_{y'}\vec{j'}$$

e sostituendo

$$= v_{x'}(a\vec{i} + b\vec{j}) + v_{y'}(c\vec{i} + d\vec{j}) = (av_{x'} + cv_{y'})\vec{i} + (bv_{x'} + dv_{y'})\vec{j}$$

Confrontando abbiamo

$$\begin{cases} v_x = av_{x'} + cv_{y'} \\ v_y = bv_{x'} + dv_{y'} \end{cases}$$

che possiamo scrivere anche in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ si dice matrice del cambiamento di coordinate da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, essa ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ nella base $\mathcal{B}$. Dalla formula (1) si vede subito che il cambiamento inverso ha per matrice la matrice inversa di M. **Esempio.** Supponiamo che $\vec{i'} = \frac{1}{5}(3\vec{i} + 4\vec{j})$ e $\vec{j'} = \frac{1}{5}(-4\vec{i} + 3\vec{j})$. Allora la matrice M è

$$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

e quindi il cambio di coordinate di vettore è

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \tag{2}$$

ossia

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{5}(3v_{x'} - 4v_{y'}) \\ v_y = \frac{1}{5}(4v_{x'} + 3v_{y'}) \end{cases}$$

Osserviamo la notevolissima proprietà che la matrice M possiede e cioè $MM^T = I$ ossia $M^{-1} = M^T$ una tale matrice si dice *matrice ortogonale*. Si tratta di un fatto generale: la matrice M ha per colonne le componenti dei vettori di $\mathcal{B}'$ rispetto a $\mathcal{B}$ ed ha la forma

$$M = \begin{pmatrix} \vec{i'} \cdot \vec{i} & \vec{j'} \cdot \vec{i} \\ \vec{i'} \cdot \vec{j} & \vec{j'} \cdot \vec{j} \end{pmatrix}$$

Osserviamo allora che M^T è proprio la matrice del cambiamento inverso e quindi coincide con M^{-1} (v. formula (1)).

Proponiamoci ora di calcolare, per esempio, le coordinate del vettore $\vec{v} = 8\vec{i} + 8\vec{j}$ nella base $\mathcal{B}'$. Applichiamo le formule (inverse delle (2) :

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{1}{5}(3v_x + 4v_y) \\ v_{y'} = \frac{1}{5}(-4v_x + 3v_y) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} v_{x'} = \frac{1}{5}(3 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = \frac{56}{5} \\ v_{y'} = \frac{1}{5}(-4 \cdot 8 + 3 \cdot 8) = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

(vedi figura 1).

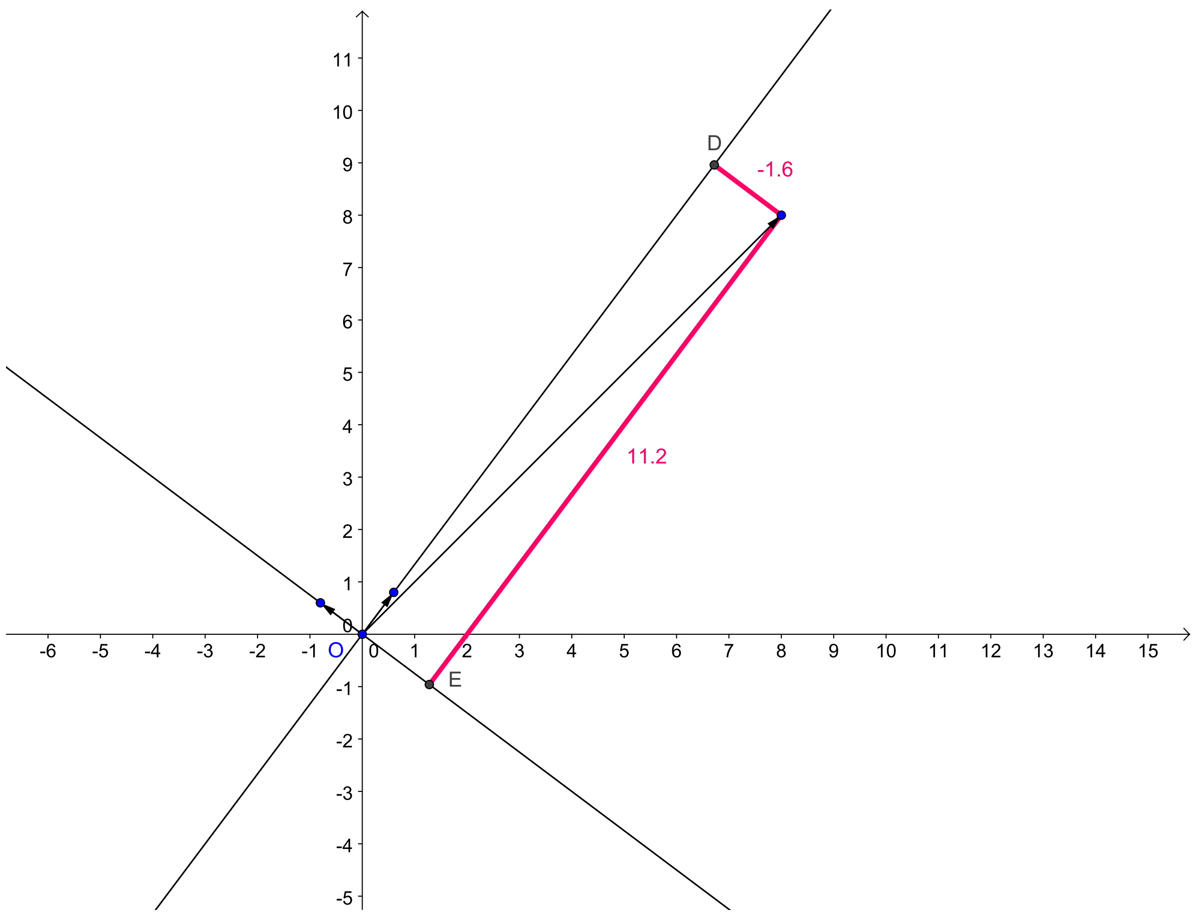


Figura 1

Supponiamo ora che anche l'origine del sistema di riferimento venga spostata in $O'(x_0, y_0)$. Allora per calcolare le coordinate del punto $P(x, y)$ nel nuovo riferimento $RC(O'x'y')$, occorrerà determinare le coordinate del vettore $\overrightarrow{O'P}$. Abbiamo allora la relazione vettoriale

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$$

ossia

$$\overrightarrow{O'P} = -\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OP}$$

Questa si traduce in

$$\overrightarrow{O'P} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_0 \\ -y_0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{x'} - x_0 \\ v_{y'} - y_0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = a(v_x - x_0) + b(v_y - y_0) \\ y' = c(v_x - x_0) + d(v_y - y_0) \end{cases}$$

Esempio. Calcolare le coordinate del punto $P(8, 8)$ nel sistema di riferimento $RC'(O'\vec{i'}, \vec{j'}$ dove $O'(-2, 4)$ e la base $\mathcal{B}'$ è quella dell'esempio precedente. Abbiamo allora

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(v_x + 2) + \frac{4}{5}(v_y - 4) = \frac{46}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(v_x + 2) + \frac{3}{5}(v_y - 4) = -\frac{28}{5} \end{cases}$$

Vedi figura 2.

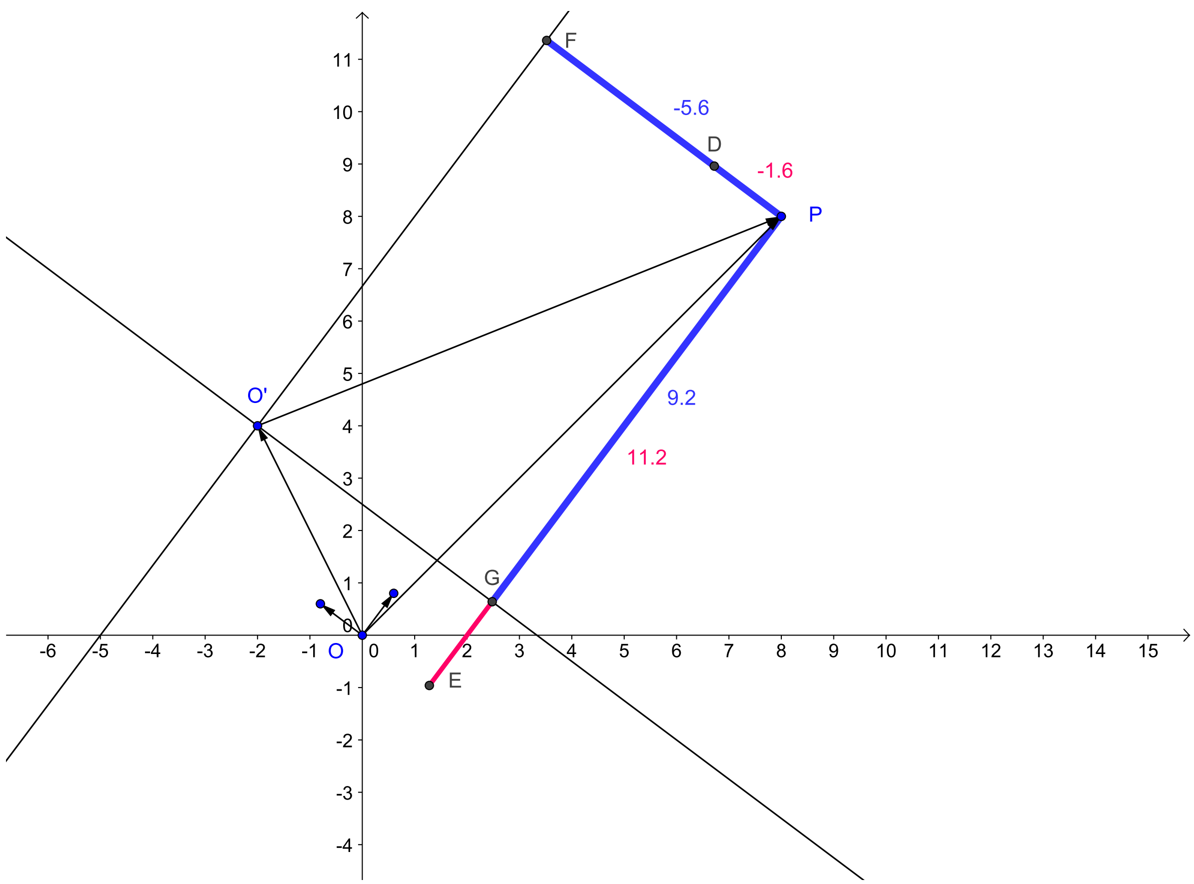


Figura 2

Esercizio Esempio. Calcolare le coordinate del punto $P(8,8)$ nel sistema di riferimento $RC'(O'\vec{i'},\vec{j'}$ dove $O'(15,-10)$ e la base $\mathcal{B}'$ è quella dell'esempio precedente. Abbiamo allora

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(8-15) + \frac{4}{5}(8+10) = \frac{51}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(8-15) + \frac{3}{5}(8+10) = \frac{82}{5} \end{cases}$$

In alternativa si poteva procedere così : Sappiamo che le nuove coordinate devono essere del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + k_1 \\ y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + k_2 \end{cases} \tag{3}$$

dove abbiamo apportato una traslazione da determinarsi alla rotazione degli assi. La traslazione può essere determinata sapendo che l'origine O' ha coordinate ovviamente $(0,0)$ nel riferimento RC' mentre ha coordinate $(15,-10)$ nel riferimento RC come assegnato. Si ha quindi

$$\begin{cases} 0 = \frac{3}{5}\cdot 15 + \frac{4}{5}\cdot(-10) + k_1 \\ 0 = -\frac{4}{5}\cdot 15 + \frac{3}{5}\cdot(-10) + k_2 \end{cases}$$

Otteniamo

$$\begin{cases} 0 = 9 - 8 + k_1 \\ 0 = -12 - 6 + k_2 \end{cases}$$

da cui $k_1 = -1, k_2 = 18$. Usando ora le (3) con questa scelta di k_1, k_2 abbiamo

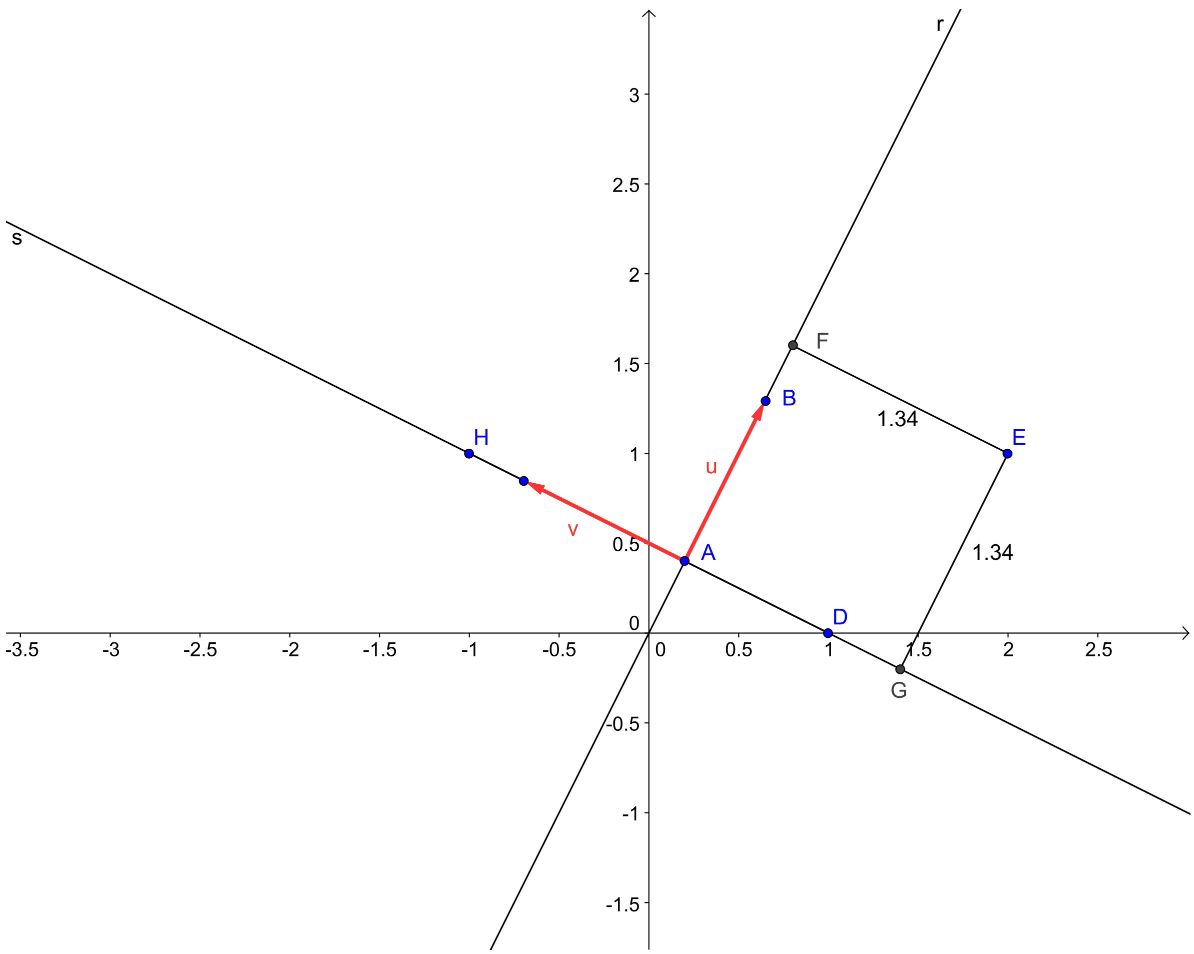
$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}(8) + \frac{4}{5}(8) - 1 = \frac{51}{5} \\ y' = -\frac{4}{5}(8) + \frac{3}{5}(8) + 18 = \frac{82}{5} \end{cases}$$

come sopra. In effetti

$$\begin{cases} k_1 = \frac{3}{5}(-15) + \frac{4}{5}(10) = -9 + 8 = -1 \\ k_2 = -\frac{4}{5}(-15) + \frac{3}{5}(10) = 12 + 6 = 18 \end{cases}$$

($(-1,18)$ sono le coordinate di O' nel sistema ottenuto semplicemente ruotando il sistema RC di partenza.)

Esercizio Si verifichi che le rette $r : -2x + y = 0$ e $s : 2y + x - 1 = 0$ sono ortogonali e si consideri il riferimento $RC(O'\vec{i'},\vec{j'})$ che ha come assi x', y' le rette r e s orientate, rispettivamente, secondo le x crescenti e secondo le x decrescenti. (V. figura 3).



r
s
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
F
B
1.34
E
H
u
v
A
1.34
D
G

Figura 3

Il punto O' è il punto di intersezione delle due rette e quindi si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2y + x - 1 = 0 \end{cases}$$

ottenendo $O'(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. Il versore di r orientato nel verso delle x crescenti è $\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (si distingue dall'altra possibile scelta perché ha la componente x positiva). Il versore di s orientata secondo le x decrescenti ha invece la componente x negativa e sarà quindi $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Abbiamo quindi $\vec{i'} = \vec{r}$ e $\vec{j'} = \vec{s}$. La matrice del cambiamento di coordinate è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

Il cambiamento di coordinate di punto è allora

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y + k_1 \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + k_2 \end{cases}$$

Ricaviamo allora

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{2}{5} + k_1 \\ 0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{5} + k_2 \end{cases}$$

da cui $k_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $k_2 = 0$. Le formule desiderate sono quindi

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}$$

Per esempio si verifica ora che i punti $D(1,0)$, $E(2,1)$ e $H(-1,1)$ del riferimento RC hanno, nel riferimento RC', coordinate, rispettivamente, $D(0, -\frac{2}{\sqrt{5}})$, $E(\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}})$, $H(0, \frac{3}{\sqrt{5}})$.