Distanze

Stefano Capparelli

March 5, 2013

Abstract

Calcoliamo alcune formule per distanze.

1 Distanza tra due rette parallele

Sia date due rette parallele r e s. Vogliamo calcolare la loro distanza. Siano ℓ, m, n i parametri direttori di entrambe le rette e siano P_0, P_1 due punti arbitrari appartenenti alle rette r e s rispettivamente. Il modulo del prodotto vettoriale $|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r}|$ rappresenta l'area del parallelogramma costruito sui vettori fattori. Dividendo per la base, costituita dal vettore $\vec{r}$ si ottiene l'altezza che è proprio la distanza cercata:

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

Esempio. Calcolare la distanza tra le rette $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$, e $s : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + \frac{4}{3}t \end{cases}$

Soluzione Possiamo prendere $P_0(1, -1, 0)$ e $P_1(3, 1, 1)$ e quindi $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La distanza cercata è dunque

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|} = \frac{|\vec{i} - \vec{j}|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{22}} = \frac{1}{11}$$

2 Distanza punto-retta

Sia assegnata una retta r con parametri direttori ℓ, m, n e sia $\vec{r} = \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$ un suo vettore di direzione. Supponiamo dato anche un punto arbitrario $P_0(x_0, y_o, z_0)$ dello spazio. Ci proponiamo di calcolare la distanza di P_0 da r.

Scegliamo ad arbitrio un punto P_1 appartenente alla retta e sia $\vec{v}$ il vettore $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$. Sappiamo che il modulo $|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r}|$ è uguale all'area del parallelogramma costruito sui due vettori fattori. Questo parallelogramma ha per base la lunghezza di $\vec{r}$ e per altezza proprio la distanza cercata. Si ha quindi

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r}|}{|\vec{r}|}$$

Esempio. Calcolare la distanza tra il punto $P_0(2, -1, 0)$ e la retta r : $\begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$. **Soluzione** La retta r ha parametri direttori $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Scelgo un punto arbitrario su r, ad esempio $P_1(-1, -1, 0)$ e quindi $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{cases} -3 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$. Calcolo

$$\overrightarrow{P_0P_1} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

La distanza cercata è infine

$$d(P_0, r) = \frac{\sqrt{9+9}}{\sqrt{4+1+1}} = \sqrt{3}$$

3 Distanza tra due rette sghembe

Sia assegnate due rette sghembe r e s di vettori direzione, rispettivamente, $\vec{r} = \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\vec{s} = \begin{pmatrix} \ell' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$. Vogliamo calcolare la distanza $d(r, s)$ tra le due rette.

Siano due punti arbitrari P_1 e P_1' rispettivamente su r e su s. La distanza cercata è la proiezione del vettore $\overrightarrow{P_1P_1'}$ sul versore normale $\vec{n}$ contemporaneamente a r e a s, cioè

$$d(r, s) = |\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{n}|$$

Essendo $\vec{n} = \pm \frac{\vec{r} \wedge \vec{s}}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|}$ si ha che la distanza cercata si può esprimere come segue:

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_1'} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|} = \frac{1}{|\vec{r} \wedge \vec{s}|} \begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & z_1 - z_1' \\ \ell & m & n \\ \ell' & m' & n' \end{vmatrix}$$

Esempio. Siano date $r : x = y = z$ e $s : x + 2y = z - 1 = 0$. Calcolarne la distanza.

Soluzione. Abbiamo $P_1(0, 0, 0)$, $P_1'(0, 0, 1)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque $\vec{r} \wedge \vec{s} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ e quindi ha modulo $\sqrt{14}$. Il prodotto misto della formula invece vale

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

La distanza cercata è quindi $d(r,s) = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

La stessa distanza si poteva calcolare anche con un altro metodo che ci permette di calcolare, oltre alla distanza vera e propria anche la retta che è incidente e perpendicolare contemporaneamente a r e a s.

Svolgiamo di nuovo l'esercizio precedente con questo nuovo metodo.

Prendiamo r e s in forma parametrica:

$$r : \begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1 \\ z = t_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t_2 \\ y = t_2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Possiamo allora considerare i due punti "mobili" su r e s: $P(t_1, t_1, t_1), Q(-2t_2, t_2, 1)$. Imponiamo che il vettore "mobile" $\overrightarrow{PQ}$ sia ortogonale a r e a s:

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{r} = 0 \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (-2t_2 - t_1) + (t_2 - t_1) + (1 - t_1) = 0 \\ -2(-2t_2 - t_1) + (t_2 - t_1) = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha soluzione $(t_1 = \frac{5}{14}, t_2 = -\frac{1}{14})$ Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ è dunque

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{6}{14} \\ \frac{9}{14} \end{pmatrix}$$

la distanza cercata è quindi $\sqrt{(\frac{3}{14})^2 + (\frac{6}{14})^2 + (\frac{9}{14})^2} = \frac{\sqrt{126}}{14} = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

4 Distanza punto-piano

La formula per la distanza punto piano è completamente analoga alla formula per la distanza punto retta nella geometria bidimensionale.

Si ha

$$d(P_0, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

dove $P_0(x_0, y_0, z_0)$ è il punto e $ax + by + cz + d = 0$ è l'equazione del piano α dato.

La dimostrazione di questa formula è la seguente. Si prenda un punto arbitrario $P_1(x_1, y_1, z_1)$ appartenente al piano dato e si consideri il vettore $\overrightarrow{P_0P_1}$. La distanza desiderata è la proiezione di questo vettore sul versore normale al piano che è

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Abbiamo allora

$$d(P_0, \alpha) = |\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{n}| = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

dove abbiamo usato il fatto che $ax_1 + by_1 + cz_1 = -d$.

Esempio. Possiamo usare la formula precedente per calcolare la distanza di due piani paralleli in quanto tale distanza coincide con la distanza di un piano da un qualunque punto dell'altro piano. Siano, per esempio, $\alpha : ax+by+cz+d = 0$ e $\beta : ax+by+cz+d' = 0$ due piani paralleli di cui vogliamo calcolare la distanza. Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto arbitrario del piano α. La distanza cercata di P_0 da β è, per la formula precedente:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|-d + d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

in quanto $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$. Ad esempio la distanza tra $x + y + 3z + 11 = 0$ e $x + y + 3z + 8 = 0$ è $\frac{11-8}{\sqrt{1+1+9}} = \frac{3}{\sqrt{11}}$.