

1. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori di uno spazio euclideo V , allora

$$|(\mathbf{u}|\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad (1.1)$$

e l'uguaglianza vale solo se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ allora la (1.1) vale con il segno di uguaglianza. Se invece $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ allora consideriamo la proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ su $\mathbf{u}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})} \mathbf{u} \quad (1.2)$$

Sappiamo, per il teorema della proiezione, che $\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ è ortogonale a $\mathbf{u}$, e scrivendo

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) + \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) \quad (1.3)$$

abbiamo decomposto $\mathbf{v}$ nella somma di due vettori tra loro ortogonali. Il Teorema di Pitagora ci dice allora che

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|^2 + \|\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|^2 \quad (1.4)$$

e quindi

$$\|\mathbf{v}\|^2 \geq \|\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|^2 \quad (1.5)$$

Indicando con $\alpha = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})}$ il coefficiente di Fourier, possiamo allora calcolare

$$\|\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|^2 = (\alpha \mathbf{u} | \alpha \mathbf{u}) = \alpha^2 (\mathbf{u} | \mathbf{u}) \quad (1.6)$$

Ricordando il significato di α otteniamo

$$\begin{aligned} \alpha^2 (\mathbf{u} | \mathbf{u}) &= \left(\frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})} \right)^2 (\mathbf{u} | \mathbf{u}) \\ &= \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})^2}{(\mathbf{u}|\mathbf{u})} = \frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

In definitiva,

$$\frac{(\mathbf{u}|\mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \leq \|\mathbf{v}\|^2 \quad (1.8)$$

ossia

$$(\mathbf{u}|\mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{u}\|^2 \quad (1.9)$$

e prendendo le radici quadrate di ambo i membri si ottiene la disuguaglianza voluta.



2. Esempi

Nello spazio $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard la disuguaglianza è equivalente a

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i)^2 \sum_{i=1}^n (b_i)^2$$

Nello spazio $\mathbb{P}_n$ con prodotto scalare

$$(p(x)|q(x)) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) \, dx$$

è equivalente a

$$\left(\int_{-1}^1 p(x)q(x) \, dx \right)^2 \leq \int_{-1}^1 p(x)^2 \, dx \int_{-1}^1 q(x)^2 \, dx$$