

1. Soluzioni approssimate di un sistema incompatibile

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 3 \end{cases} \quad (1.1)$$

È facile verificare che la matrice dei coefficienti ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3. Il sistema è dunque incompatibile. Per trovare le soluzioni approssimate dobbiamo risolvere le equazioni normali:

$$A^T A Z = A^T B \quad (1.2)$$

Calcoliamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 & -16 \\ -6 & 6 & 6 & 16 \\ -6 & 6 & 90 & 72 \\ -16 & 16 & 72 & 80 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

mentre

$$A^T B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 33 \\ 20 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Le equazioni normali si riducono quindi al sistema con matrice $A^T A$ e termini noti $A^T B$. Per risolvere questo sistema prendiamo la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & -6 & -16 & 1 \\ -6 & 6 & 6 & 16 & -1 \\ -6 & 6 & 90 & 72 & 33 \\ -16 & 16 & 72 & 80 & 20 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

e riduciamola a gradini ottenendo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 17/42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Le soluzioni desiderate sono

$$\begin{pmatrix} s + 2t + \frac{4}{7} \\ 2 \\ -\frac{2}{3}t + \frac{17}{42} \\ t \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

al variare di $s, t \in \mathbb{R}$.

2. Esercizio

Supponiamo che da una ricerca svolta sulla crescita di abbonamenti alla televisione via cavo svolta per conto di una compagnia di TV, si siano ottenuti i seguenti dati

Anni	Abbonamenti (in milioni)	
1996	50	
1997	55	
1998	57	
1999	60	(2.1)
2000	68	
2001	72	
2002	80	
2003	83	

Basandoci su questi dati, quanti abbonamenti ci dovrebbero essere nel 2005?

(Avendo posto $x = 0$ per rappresentare l'anno 2000, la soluzione ci dà la retta $y = 4,87x + 68,1$ che per $x = 5$, corrispondente al 2005, ci fornisce il valore di circa 92 milioni di abbonamenti. Il valore per $x = 13$ ci dà $y = 131$. Da una breve e superficiale ricerca in rete sembra che al momento invece ci siano circa 210 milioni di abbonamenti)