

Esempio di classificazione di una conica

Stefano Capparelli

November 14, 2013

Abstract

Illustriamo due esempi di classificazione di un'ellisse e di una parabola.

1 Il caso dell'ellisse

Sia data l'equazione

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0 \quad (1)$$

La sua matrice è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Si verifica che il determinante della matrice A vale -36; si tratta quindi di una conica generale. Essendo inoltre

$$\alpha_{00} = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 6 > 0$$

sappiamo che si tratta di un'ellisse. Per calcolarne il centro usiamo le formule

$$x_0 = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}} \quad y_0 = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}$$

(cf. formule 7.2.1 del testo). Nell'esempio otteniamo il punto $P_0(1, -2)$.

Gli assi di simmetria si ottengono studiando gli autovalori e autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Si calcola che gli autovalori sono $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 1$ con autovettori rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

che normalizzati danno

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Gli assi di simmetria si calcolano prendendo le rette per il centro e aventi vettori di direzione uguali agli autovettori trovati. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}(x-1) - 2(y+2) &= 0 \\ 2(x-1) + (y+2) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

ovvero, semplificando e normalizzando,

$$\begin{aligned}\frac{x-2y-5}{\sqrt{5}} &= 0 \\ \frac{2x+y}{\sqrt{5}} &= 0\end{aligned}\tag{3}$$

prendiamo questi assi di simmetria come nuovi assi di riferimento

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x-2y-5}{\sqrt{5}} \\ y' &= \frac{2x+y}{\sqrt{5}}\end{aligned}\tag{4}$$

Le trasformazioni inverse sono

$$\begin{aligned}x &= \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} + 1 \\ y &= \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} - 2\end{aligned}\tag{5}$$

Osserviamo che la nuova origine O' è il centro di simmetria della conica che ha coordinate $x=1, y=2$.

Andando a sostituire le (5) in (1) sviluppando e semplificando si ottiene l'equazione

$$x'^2 + 6y'^2 - 6 = 0\tag{6}$$

ovvero, in forma canonica:

$$\frac{x'^2}{6} + y'^2 = 1\tag{7}$$

Ora possiamo facilmente calcolare i fuochi dell'ellisse: $c^2 = a^2 - b^2 = 6 - 1 = 5$ e dunque $c = \sqrt{5}$. l'eccentricità è $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Le coordinate dei fuochi sono $x' = \sqrt{5}, y' = 0$ e $x' = -\sqrt{5}, y' = 0$ ossia, nel vecchio sistema di riferimento, sostituendo in (5), $x = 2, y = 4$ e $x = 0, y = 0$. Le direttrici sono $x' = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}$ e dunque

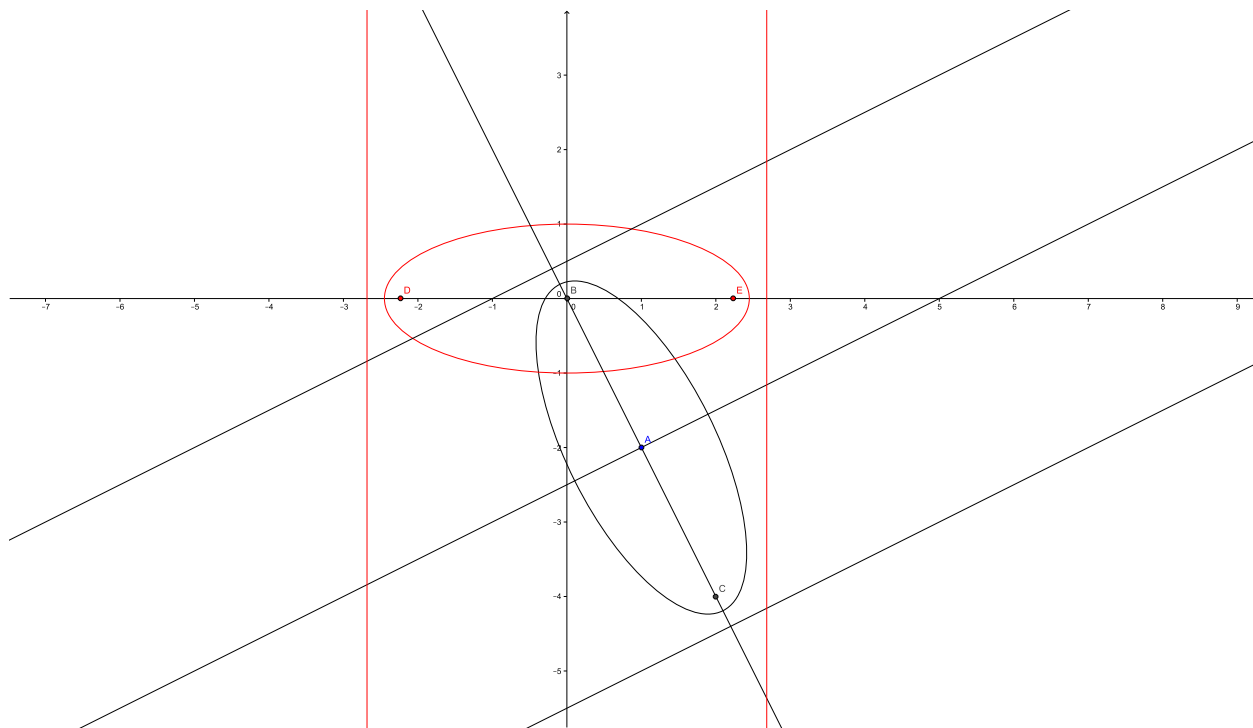
$$\frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} = \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\tag{8}$$

ossia

$$\begin{aligned}x - 2y - 11 &= 0 \\ x - 2y + 1 &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

Nella figura che segue in nero è la conica assegnata, in rosso la sua forma canonica.

Figura 1



Osserviamo che si poteva trovare la formula del cambiamento di coordinate anche come si era fatto durante la discussione a lezione dei cambiamenti e cioè come segue.

Prendiamo la matrice M che ha per colonne i versori

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(la scelta di mettere come prima colonna l'uno o l'altro vettore è arbitraria ma si riflette nella scelta di avere un'ellisse, per così dire "orizzontale" o "verticale") si ottiene direttamente il cambiamento di riferimento

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

vedi le formule (5). Il resto dei calcoli è come sopra.

2 Il caso della parabola

Sia data l'equazione

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 3y + 1 = 0 \quad (11)$$

La sua matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica che il determinante della matrice A vale $-\frac{25}{4}$; si tratta quindi di una conica generale. Essendo inoltre

$$\alpha_{00} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

sappiamo che si tratta di una parabola.

L'asse di simmetria di una parabola si calcola con la formula di pagina 101 del testo

$$uf_x + vf_y = 0 \quad (12)$$

Nel nostro esempio: prendiamo la parte quadratica dell'equazione della conica (11). Il fatto che si tratti di una parabola assicura che la parte quadratica sia il quadrato di un binomio:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$$

L'equazione dell'asse di simmetria si trova allora dalla formula richiamata sopra:

$$1(f_x) - 2f_y = 0$$

Ora $f_x = 2x - 4y - 4$ e $f_y = -4x + 8y + 3$ da cui $2x - 4y - 4 - 2(-4x + 8y + 3) = 0$ ossia $x - 2y - 1 = 0$. Una volta trovato l'asse di simmetria, possiamo determinare il vertice intersecando l'asse con la conica:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 3y + 1 = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad (13)$$

da cui si ricava il vertice $V(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$. Prendiamo ora la retta passante per il vertice e perpendicolare all'asse di simmetria

$$2(x - \frac{1}{5}) + (y + \frac{2}{5}) = 0$$

ossia

$$2x + y = 0 \quad (14)$$

Vogliamo prendere ora quest'ultima retta come nuovo asse delle x' e l'asse di simmetria come asse y' . Abbiamo dunque

$$\begin{cases} x' = \frac{x-2y-1}{\sqrt{5}} \\ y' = \frac{2x+y}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad (15)$$

e la trasformazione inversa

$$\begin{cases} x = \frac{x'+2y'}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} \\ y = \frac{-2x'+y'}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5} \end{cases} \quad (16)$$

Sostituendo in (11) abbiamo

$$5x'^2 - \sqrt{5}y' = 0$$

ossia

$$y' = \sqrt{5}x'^2$$

Vedi figura qui sotto in cui, di nuovo, in rosso abbiamo la conica in forma canonica.

Figura 2

