Esempio di classificazione di una conica

Stefano Capparelli

November 12, 2013

Abstract

Illustriamo un esempio di classificazione di cui chiediamo di verificare i calcoli e i grafici usando Geogebra .

1 I dati del problema

Sia data la matrice simmetrica di ordine 3 seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

che corrisponde alla equazione

$$5x^2 + 12xy + 7y^2 + 8x + 6y + 1 = 0 \tag{1}$$

Si verifica che il determinante della matrice A vale -14; si tratta quindi di una conica generale. Essendo inoltre

$$\alpha_{00} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} < 0$$

sappiamo che si tratta di un'iperbole. Per calcolarne il centro usiamo le formule

$$x_0 = \frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}} \qquad y_0 = \frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}$$

(cf. formule 7.2.1 del testo). Nell'esempio otteniamo il punto $P_0(10, -9)$.

Gli assi di simmetria si ottengono studiando gli autovalori e autovettori della matrice $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. Si calcola che gli autovalori sono $\lambda_1 = 6+\sqrt{37}$ e $\lambda_2 = 6-\sqrt{37}$ con autovettori rispettivamente

$$\begin{pmatrix} -1+\sqrt{37} \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1-\sqrt{37} \\ 6 \end{pmatrix}$$

che normalizzati danno

$$\frac{1}{\sqrt{74-2\sqrt{37}}} \begin{pmatrix} -1+\sqrt{37} \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{74+2\sqrt{37}}} \begin{pmatrix} -1-\sqrt{37} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Prendendo la matrice M che ha queste componenti come colonne si ottiene il cambiamento di riferimento

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Sostituendo le espressioni di x e y così ottenute nell'equazione (1) si ottiene

$$(6+\sqrt{37})x'^2 - (-6+\sqrt{37})y'^2 + 14 = 0$$

ossia nella forma canonica:

$$-\frac{6+\sqrt{37}}{14}x'^2 + \frac{-6+\sqrt{37}}{14}y'^2 = 1$$

Per trovare i fuochi di quest'ultima iperbole in posizione canonica calcoliamo

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{14}{6+\sqrt{37}} + \frac{14}{-6+\sqrt{37}} = 28\sqrt{37}$$

e quindi i fuochi sono $F(0, \sqrt{28\sqrt{37}}) \approx (0, 13.05)$ e $F'(0, -\sqrt{28\sqrt{37}}) \approx (0, -13.05)$; sostituendo queste coordinate nelle (2) si ottiene

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{28\sqrt{37}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix} \approx (0.042, -0.564) \tag{3}$$

per l'altro fuoco si ottiene approssimativamente $(19.958, -17.436)$. Gli asintoti si calcolano risolvendo l'equazione (v 7.2.2 del testo)

$$5\ell^2 + 12\ell m + 7m^2 = 0$$

da cui dividendo per m^2 si ha

$$5\frac{\ell^2}{m^2} + 12\frac{\ell}{m} + 7 = 0$$

e quindi $\frac{\ell}{m} = -\frac{7}{5}$ e $\frac{\ell}{m} = -1$. Gli asintoti sono dunque le rette passanti per il centro della conica e aventi i parametri direttori appena trovati. Vedi Figura 1. (In blu l'iperbole iniziale, in rosso l'iperbole in forma canonica).

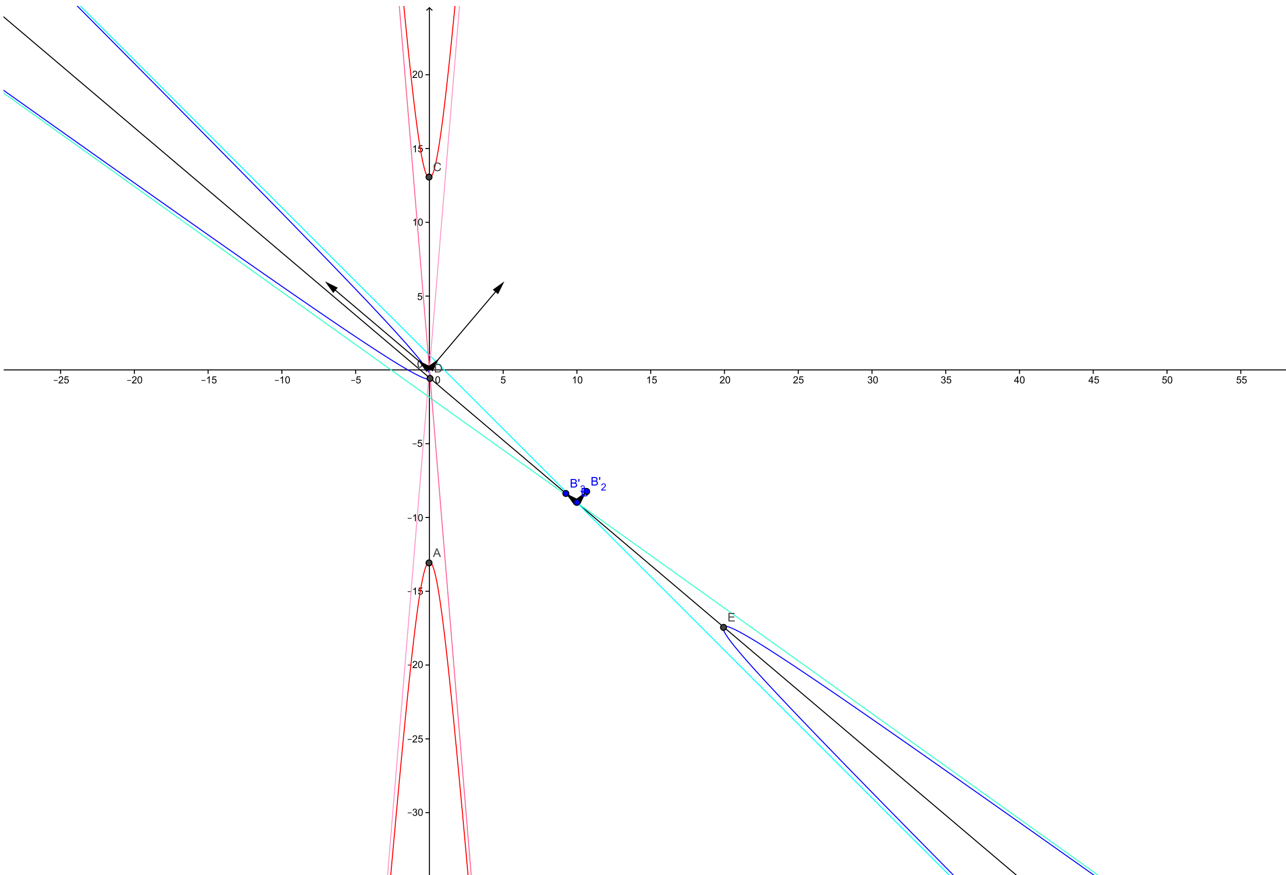
C
A
E
B'
B'2
0
-25
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-25
-30

Figura 1