0.1 Esercizio

Siano $\mathbf{u}_1 = (1,2,-1,3)$, $\mathbf{u}_2 = (1,-1,-2,0)$, $\mathbf{u}_3 = (-2,3,3,1)$, $\mathbf{u}_4 = (3,4,0,7)$, $\mathbf{u}_5 = (2,1,1,3)$ vettori di $\mathbb{R}^4$. Sia $W_1 = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ e $W_2 = \langle \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5 \rangle$. Calcolare $\dim W_1, \dim W_2, \dim(W_1 \cap W_2), \dim(W_1 + W_2)$. Dire se la somma è diretta.

Per W_1 basta andare a studiare la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3 e quindi $\dim W_1 = 3$. Per W_2 la matrice è

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 2 e quindi $\dim W_2 = 2$. Lo spazio $W_1 + W_2$ è generato da tutti i 5 vettori e quindi la matrice da studiare è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che ha rango 3. Una forma a gradini è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi una base è data dalle prime tre righe di questa matrice. Per quanto riguarda lo spazio intersezione $W_1 \cap W_2$, dalla formula di Grassmann abbiamo

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$$

cioè

$$3 + 2 = \dim(W_1 \cap W_2) + 3$$

da cui sappiamo che $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$; pertanto la somma non è diretta perché non è zero. Vediamo quindi che $W_1 \cap W_2 \subset W_2$, ma sono della stessa dimensione. Ne segue che $W_1 \cap W_2 = W_2$ ossia, in altre parole, W_2 è contenuto in W_1.

Illustriamo anche come si possono ottenere le equazioni cartesiane di un sottospazio vettoriale usando un ragionamento sfruttato per ottenere le equazioni delle rette e dei piani nei capitoli precedenti. Illustriamo il metodo trovando delle equazioni per W_2. Le equazioni si trovano imponendo che la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

abbia ancora rango 2. Questo si può esprimere, per esempio, osservando che il minore $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è non nullo e quindi si richiede che

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 7x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

che sono le equazioni cartesiane del sottospazio. Si tratta di un piano (cioè un sottospazio di dimensione 2) dentro uno spazio di dimensione 4.

Completare l'esercizio trovando le equazioni di W_1 e infine quelle di $W_1 \cap W_3$.