0.1 Matrici simili

Definizione 0.1.1. Due matrici A, B di ordine n si dicono simili se esiste una matrice invertibile P con la proprietà che $P^{-1}AP = B$.

Con questa terminologia dunque una matrice è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale.

Esempio 0.1.2. Verificare che la similitudine è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le matrici di ordine n. Infatti:

1. Una matrice A è simile a se stessa: $A = I^{-1}AI$ (riflessività)
2. Se A è simile a B allora B è simile ad A (simmetria). Basta vedere che se $P^{-1}AP = B$ allora $PBP^{-1} = A$.
3. Se A è simile a B e B è simile a C, allora A è simile a C (transitivià). Se $P^{-1}AP = B$ e $Q^{-1}BQ = C$ allora $Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ) = C$, come richiesto.

Abbiamo il seguente interessante teorema.

Teorema 0.1.3. *Se A e B sono matrici simili allora*

1. $\det A = \det B$*;*
2. $c_A(x) = c_B(x)$*;*
3. *A e B hanno gli stessi autovalori*

Dimostrazione. 1. Se $P^{-1}AP = B$ allora $\det B = \det(P^{-1}AP)$. Per il Teorema di Binet questo diventa

$$\det P^{-1} \det A \det P = \det P^{-1} \det P \det A = \det A$$

2.

$$\begin{aligned} c_B(x) &= \det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) \\ &= \det(xP^{-1}IP - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ &= \det(xI - A) = c_A(x) \end{aligned} \tag{1}$$

3. Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, quindi ciò segue dal punto precedente.

□

Ci si può domandare come riconoscere se due date matrici sono simili oppure no. Una risposta completa deve aspettare la trattazione delle cosiddetta *forma canonica di Jordan* che si troverà negli approfondimenti. Per ora basti dire che se una matrice è diagonalizzabile la sua forma di Jordan è la forma diagonale. La forma canonica di Jordan è di maggiore rilevanza nei casi in cui la matrice non è diagonalizzabile. In quel caso la forma canonica di Jordan è una matrice "quasi" diagonale che continua ad avere sulla diagonale principale gli autovalori della matrice.

Ci preme sottolineare comunque che si possono avere due matrici A e B che non sono simili ma che hanno stesso determinante, stesso polinomio caratteristico, e stessi autovalori. Un esempio sono le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice identità. È facile vedere che esse hanno in comune determinante, autovalori, polinomio caratteristico ed inoltre non sono simili. Infatti la matrice I è simile solo a se stessa:

$$P^{-1}IP = I$$

Studiamo ora alcuni coefficienti del polinomio caratteristico. Guardiamo da vicino il caso di ordine 2 e poi generalizziamo.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una generica matrice di ordine 2. Si può facilmente calcolare il suo polinomio caratteristico:

$$c_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ab - cd)$$

da cui si vede che il termine noto del polinomio caratteristico di A è uguale a $\det A$.

Il coefficiente di x è l'opposto della somma degli elementi sulla diagonale principale di A.

Definizione 0.1.4. La *traccia* di una matrice A di ordine n è la somma degli elementi sulla diagonale principale. Essa si denota $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Il polinomio caratteristico di una matrice di ordine 2 è quindi $c_A(x) = x^2 - (TrA)x + \det A$. In generale abbiamo

Proposizione 0.1.5. *Se A è una matrice di ordine n allora $c_A(x)$ è un polinomio monico di grado n. Il coefficiente di x^{n-1} è $-Tr(A)$ e il termine noto è $(-1)^n \det A$.*

Dimostrazione.

$$c_A(x) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Per prima cosa osserviamo che il termine noto di un polinomio è uguale al valore che il polinomio assume in 0. Se poniamo $x = 0$ in 2 otteniamo

$$c_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

come richiesto.

Per capire invece la formula dei coefficienti di grado n e $n-1$, ci dobbiamo ricordare che un determinante si calcola prendendo tutti i possibili prodotti competenti. Immaginiamo di fare il calcolo con lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga. Se fisso l'attenzione su un elemento fuori dalla diagonale principale, esso non contiene la variabile x e inoltre il suo complemento algebrico, che si ottiene cancellando la riga e la colonna che si incrociano nell'elemento in questione, contiene al massimo la potenza x^{n-2} della variabile e dunque non dà alcun contributo al calcolo dei coefficienti di x^n

e x^{n-1}. L'unico contributo a questi coefficienti viene dal prodotto competente che si ottiene prendendo gli elementi sulla diagonale principale. Ripetiamo: degli $n!$ prodotti competenti solo questo dà un contributo ai coefficienti di x^n e x^{n-1}. Esaminiamo questo prodotto più da vicino:

$$(x - a_{11})(x - a_{22})(x - a_{33}) \cdots (x - a_{nn})$$

È chiaro che x^n ha coefficiente 1, e questo stabilisce che il polinomio caratteristico è monico. Ma è anche chiaro che per ottenere x^{n-1} occorre prendere, durante il calcolo del prodotto, $n - 1$ volte x negli n fattori e, a turno, uno dei termini $-a_{11}, -a_{22}, -a_{33}, \ldots, -a_{nn}$. In altre parole, il coefficiente di x^{n-1} è proprio $-a_{11} - a_{22} - a_{33} - \cdots - a_{nn} = -Tr(A)$.

□

Corollario 0.1.6. *1. Due matrici simili hanno la stessa traccia.*

2. Una matrice è non invertibile se e solo se essa ammette autovalore nullo.

3. $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

4. $Tr(A) = \lambda_1 + \cdots \lambda_n$

Dimostrazione. 1. Abbiamo visto che esse hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi i coefficienti sono gli stessi.

2. Se una matrice è non invertibile allora il suo determinante è nullo e quindi il termine noto del polinomio caratteristico è zero, Ciò significa che 0 è radice di esso. Viceversa se una matrice ha autovalore nullo vuol dire che il SLO $AX = 0$ ammette autosoluzioni e quindi la matrice A è non invertibile.

3. Se A è diagonalizzabile essa è simile ad una matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori. Il determinante della matrice diagonale è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale e coincide col determinante di A. Se A non è diagonalizzabile il risultato è vero ma la dimostrazione è differente e passa attraverso la forma canonica di Jordan. Si vedrà negli approfondimenti.

4. Come nel punto precedente, la traccia di una matrice diagonale è la somma degli autovalori e si conclude come prima utilizzando il punto 1 di questo corollario.

□

Terminiamo questa sezione con l'enunciato di un importante Teorema la cui dimostrazione è rimandata agli approfondimenti.

Teorema 0.1.7 (Cayley-Hamilton). *Se A è una matrice quadrata di ordine n e $c_A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ ha senso considerare $c_A(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_nI$ e risulta $c_A(A) = 0$, cioè uguale alla matrice nulla.*

Esempio 0.1.8. Prendiamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ di cui abbiamo già calcolato il polinomio caratteristico: $c_A(x) = x^2 - 2x - 3$. Possiamo allora verificare che

$$A^2 - 2A - 3I = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2-3 & 2-2 \\ 8-8 & 5-2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Come previsto dal teorema.

Il teorema ci fornisce una nuova maniera per calcolare l'inversa di una matrice.

Proposizione 0.1.9. *Se A è una matrice invertibile di ordine n e*

$$c_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

è il suo polinomio caratteristico, allora

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-2}A + a_{n-1}I).$$

Dimostrazione. Dal Teorema di Cayley-Hamilton segue:

$$c_A(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots a_{n-1}A + a_n I = \mathbf{0}$$

da cui

$$I = -\frac{1}{a_n}(A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-2}A^2 + a_{n-1}A).$$

e mettendo A in evidenza

$$I = -\frac{1}{a_n}A(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-2}A + a_{n-1}I).$$

da cui si deduce che la matrice

$$-\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots + a_{n-2}A + a_{n-1}I)$$

è l'inversa di A.

□

Esempio 0.1.10. Usare il Teorema di Cayley-Hamilton per calcolare A^3 e A^{-1} dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Per il teorema abbiamo

$$\begin{aligned} A^2 - 2A - 3I &= 0 \\ A^2 &= 2A + 3I \\ A^3 &= A(2A + 3I) \\ A^3 &= 2A^2 + 3A \\ A^3 &= 2(2A + 3I) + 3A \\ A^3 &= 7A + 6I \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 28 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 28 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

Ora calcoliamo l'inversa

$$\begin{aligned} A^2 - 2A - 3I &= 0 \\ A^2 - 2A &= 3I \\ A(A-2I) &= 3I \\ A\frac{(A-2I)}{3} &= I \end{aligned} \tag{4}$$

da cui

$$A^{-1} = \frac{(A-2I)}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$