1 Esercizio

Calcolare una base per il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio $U = \langle \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ in $\mathbb{R}^5$. Decomporre il vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ nella somma di un vettore di U e un vettore di $U^\perp$.

Soluzione.

Per definizione, i vettori di $U^\perp$ sono quei vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^5$ che sono ortogonali a ogni vettore di U. Per questo è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \end{cases}$$

In coordinate, ponendo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Questo è un SLO la cui matrice dei coefficienti ha per righe proprio le componenti di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Possiamo determinare una base di $U^\perp$ risolvendo il sistema. Per esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ x_1 = -x_3 - x_5 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5 \\ x_1 = -x_3 - x_5 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_1 - x_3 - x_4 - x_5 \\ x_1 = -t_1 - t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 - t_3 \\ x_2 = t_1 + t_3 - t_1 - t_2 - t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 - t_3 \\ x_2 = -t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$$

Come sappiamo, una base di $U^\perp$ si ottiene dando ai tre parametri, di volta in volta, valore 1 ad uno di essi e 0 agli altri due. Così facendo abbiamo la base

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per la seconda parte dell'esercizio, in cui dobbiamo decomporre il vettore assegnato usiamo la formula $\mathbf{v} = p_U(\mathbf{v}) + (\mathbf{v} - p_U(\mathbf{v}))$. Per calcolare $\mathbf{p} = p_U(\mathbf{v})$ ci occorre una base ortonormale di U. Per far ciò applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt alla base di U che già abbiamo. Il primo vettore è

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il secondo è

$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo ora calcolare la proiezione ortogonale con la formula (sviluppo di Fourier)

$$p_U(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2$$

Otteniamo

$$p_U(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}) = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\-3\\2\end{pmatrix}}{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\-3\\2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\-3\\2\end{pmatrix}}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\frac{15}{5}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{0}{2^2+3^2+2^2+3^2+2^2}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} = \mathbf{p}$$

Rimane da calcolare

$$\mathbf{v}-\mathbf{p} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Si può facilmente verificare che questo vettore appartiene a $U^\perp$:

$$\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Infine, la decomposizione cercata è

$$\boxed{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\\3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}}$$