Studiare la conica di equazione

$$2x^2-4xy-y^2-4x-8y+14=0$$

Sol.

La matrice è

$$A=\begin{pmatrix}14 & -2 & -4\\ -2 & 2 & -2\\ -4 & -2 & -1\end{pmatrix}$$ con $\det A=-144\neq 0$

si tratta dunque di una conica generale (irriducibile)

Da $\alpha_{00}=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-2-4=-6<0$ vediamo che

si tratta di un'iperbole. Il suo centro di simmetria è

$$\left(\frac{\alpha_{01}}{\alpha_{00}},\frac{\alpha_{02}}{\alpha_{00}}\right)=\left(\frac{-\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -4 & -1\end{vmatrix}}{-6},\frac{\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -4 & -2\end{vmatrix}}{-6}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{-6},\frac{12}{-6}\right)=(-1,-2)$$

Per gli assi di simmetria: Calcoliamo gli autospazi della matrice $A_{00}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ di equazione

caratteristica $\lambda^2-\lambda-6=0$ e autovalori $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-2$

Per $\lambda_1=3$ abbiamo $\begin{pmatrix}3-2 & 2\\ 2 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $x+2y=0$

Per $\lambda_2=-2$ $\begin{pmatrix}-2-2 & 2\\ 2 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $2x-y=0$

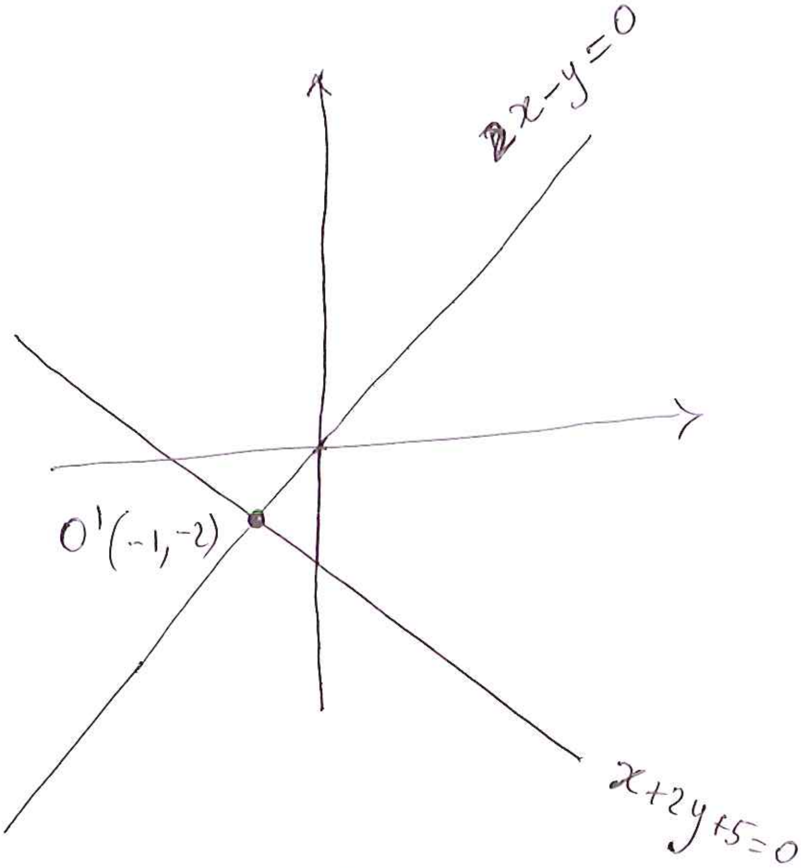
Gli assi di simmetria sono le parallele e queste rette passanti per il centro di simmetria $(-1,-2)$ da cui: $x+2y+k=0$ e $2x-y+h=0$

$-1-4+k=0$, $k=5$

$-2+2+h=0$ $h=0$

Assi: $x+2y+5=0$

$2x-y=0$



L'equazione assumerà la sua forma canonica se scegliamo un nuovo riferimento in cui la nuova origine è O', il centro di simmetria, e i nuovi assi sono gli assi di simmetria, allora l'eq. avrà una forma "semplice".

Non ha importante quale dei due assi si sceglie ③
come asse x' e quale come asse y'.

Si sceglie ad esempio la retta $2x-y=0$ come asse y', e $x+2y+5=0$ come asse x'.

L'asse y' ha equazione $x'=0$ ~~e quindi~~ mentre l'asse x' ha equazione $y'=0$. Di conseguenza

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y + 5 \end{cases}$$

sono, "in prima approssimazione" le eq. del cambiamento.

Queste così come sono scritte non vanno bene perchè la ~~tabella~~ matrice dei coefficienti non è ortogonale. Occorre normalizzare.

Le equazioni corrette sono

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{2x-y}{\sqrt{5}} \\ y' = \dfrac{x+2y+5}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Ci occorrono ora le relazioni inverse.
Essendo la matrice ortogonale inversa è uguale a trasposta.

(V. Testo p 163)

Abbiamo dunque

$$(2) \quad \begin{cases} x = \dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}} - 1 \\ y = \dfrac{-x'+2y'}{\sqrt{5}} - 2 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione della conica:

$$2\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt5}-1\right)^2-4\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt5}-1\right)\left(\frac{-x'+2y'}{\sqrt5}-2\right)+ \quad (*)$$

$$(*)\quad -\left(\frac{-x'+2y'}{\sqrt5}-2\right)^2-4\left(\frac{2x'+y'}{\sqrt5}-1\right)-8\left(\frac{-x'+2y'}{\sqrt5}-2\right)+14=0$$

Sviluppando, con un po' di calcoli, si trova

$$2-\cancel{\frac{8x'}{\sqrt5}}+\frac{8x'^2}{5}-\cancel{\frac{4y'}{\sqrt5}}+\cancel{\frac{8x'y'}{5}}+\boxed{\frac{2y'^2}{5}}+$$

$$-8+\frac{8x'^2}{5}+\cancel{\frac{12x'}{\sqrt5}}-\cancel{\frac{12x'y'}{5}}+\cancel{\frac{16y'}{\sqrt5}}\boxed{-\frac{8y'^2}{5}}+$$

$$-4-\cancel{\frac{4x'}{\sqrt5}}-\frac{x'^2}{5}+\cancel{\frac{8y'}{\sqrt5}}+\cancel{\frac{4x'y'}{5}}\boxed{-\frac{4y'^2}{5}}$$

$$+34-\cancel{\frac{8x'}{\sqrt5}}-\cancel{\frac{4y'}{\sqrt5}}+\cancel{\frac{8x'}{\sqrt5}}-\cancel{\frac{16y'}{\sqrt5}}=0$$

$$\frac{15}{5}x'^2-\frac{10}{5}y'^2+24=0 \quad \text{ossia} \quad 3x'^2-2y'^2+24=0$$

In forma canonica: $-\frac{3x'^2}{24}+\frac{2y'^2}{24}=1$ ossia

$$\frac{y'^2}{12}-\frac{x'^2}{8}=1$$

(Con altre scelte degli assi avremmo $\frac{x'^2}{12}-\frac{y'^2}{8}=1$)

Osserviamo che nella forma $3x'^2 - 2y'^2 + 24 = 0$ (5)

i coefficienti delle variabili al 2° grado sono proprio gli autovalori, trovati prima, di A_{00}.

In definitiva, quindi, questa forma si poteva quasi del tutto scrivere in anticipo. Tranne per il termine noto. Tuttavia, tener conto solo dei termini costanti nell'espressione (*) della pagina precedente non è troppo complicato:

$$2(1) - 4(2) - (4) - 4(-1) - 8(-2) + 14 = 24.$$

Nel nuovo riferimento $RC(O'x'y')$ troviamo i fuochi: $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 8 = 20$ $\quad c = 2\sqrt{5}$

da cui $(0, 2\sqrt{5})$ e $(0, -2\sqrt{5})$ sono i due fuochi.

Quali sono le coordinate dei fuochi nel riferimento $RC(Oxy)$? Basta sostituire in (2) di pag. 3

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 1 = 1 \\[2ex] y = \dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 2 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \dfrac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 1 = -3 \\[2ex] y = \dfrac{-4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - 2 = -6 \end{cases}$$

⑥

I vertici sono $(0, 2\sqrt{3})$, $(0, -2\sqrt{3})$

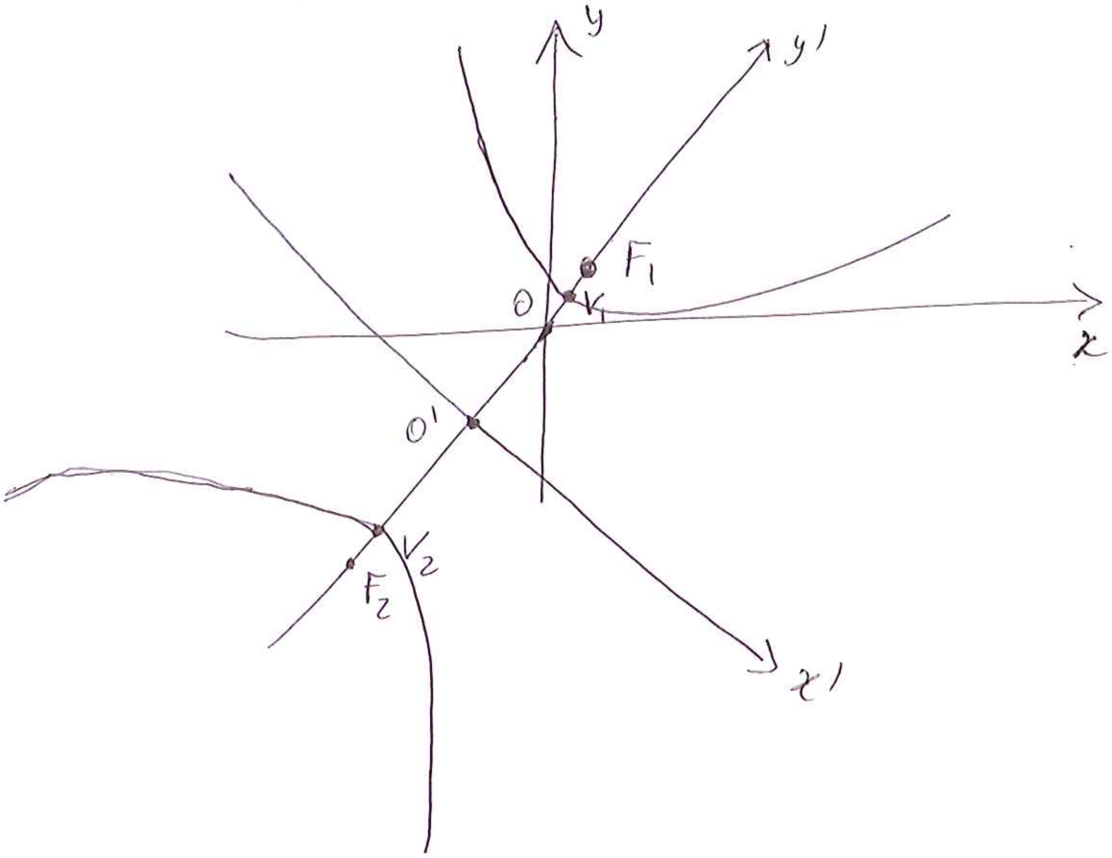
in $RC(O'x'y')$ mentre sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - 1 = \dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \simeq 0.55 \\[2ex] y = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - 2 = \dfrac{4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \simeq 1.10 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2\sqrt{3} - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \simeq -2.55 \\[2ex] y = \dfrac{-4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \simeq -5.10 \end{cases} \quad \text{in } RC(Oxy)$$

Il disegno approssimato è



Gli asintoti dell'iperbole si ottengono nel modo seguente. Esse sono rette passanti per il centro di simmetria O' ~~che~~ i cui parametri direttori, l, m, annullano la parte quadratica dell'equazione della conica. Nel nostro caso la parte quadratica (= di 2° grado) dell'eq. è

$$2x^2 - 4xy - y^2$$

Dobbiamo quindi risolvere l'equazione

$$2l^2 - 4lm - m^2 = 0$$

Possiamo porre $m = 1$; da cui

$$2l^2 - 4l - 1 = 0$$

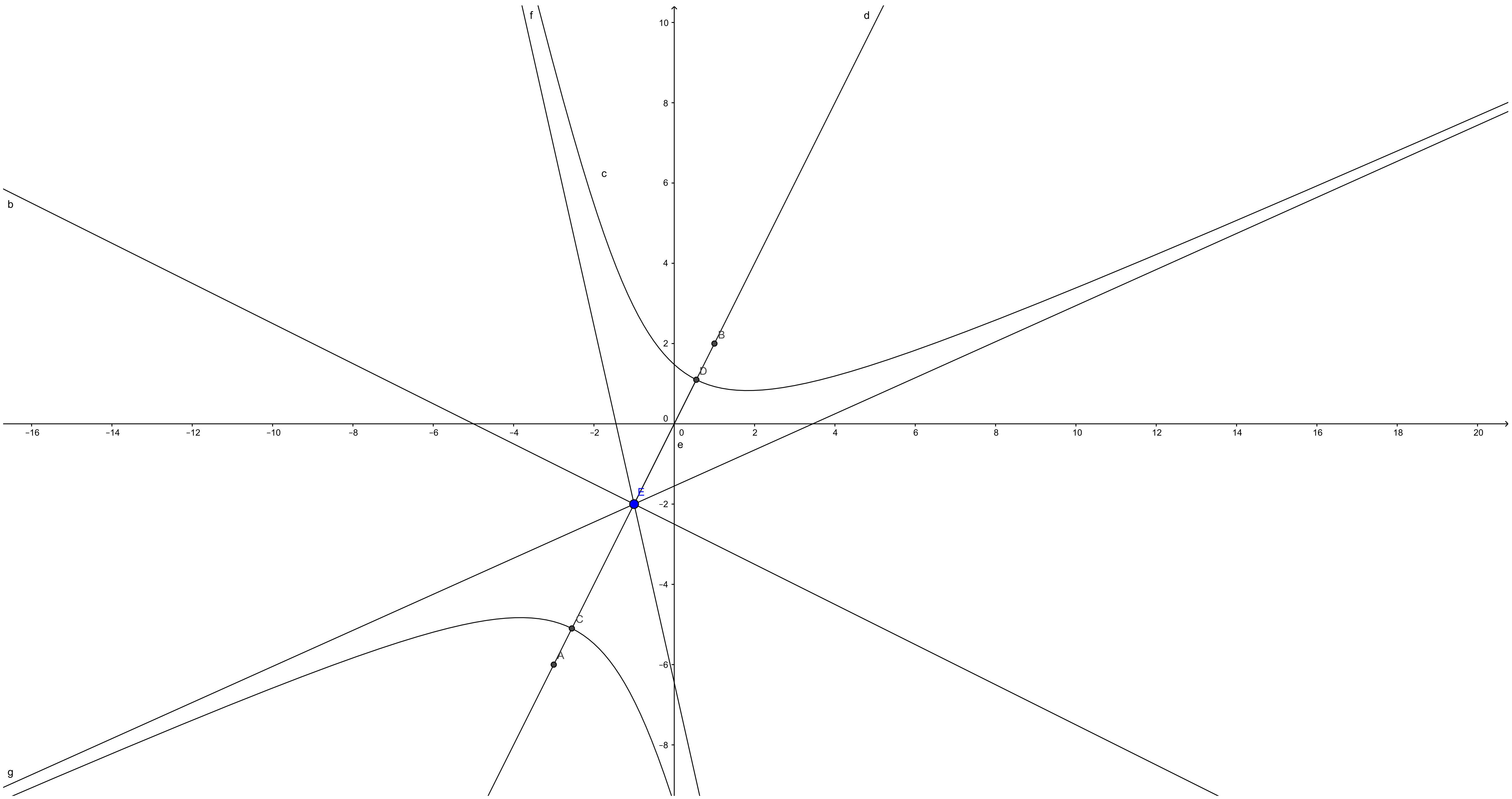
$$l = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} \quad \text{ossia} \quad \begin{array}{l} l \simeq 2.22 \\ l \simeq -0.22 \end{array}$$

L'equazione della retta passante per O' e avente questi parametri direttori è $\frac{x+1}{l} = \frac{y+2}{m}$ (V. (5.17) testo)

ossia

$$\frac{2}{2+\sqrt{6}}(x+1) = y+2 \quad \text{oppure}$$

$$\frac{2}{2-\sqrt{6}}(x+1) = y+2.$$



f
d
c
b
g
e
B
D
E
C
A
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-16
-14
-12
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20