Studiare la conica di equazione

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - 9\sqrt{2}\,x - 7\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \quad (1)$$

Sol La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -\frac{9}{2}\sqrt{2} & -\frac{7}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{9\sqrt{2}}{2} & 2 & 2 \\ -\frac{7\sqrt{2}}{2} & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\det A = -4$: è una conica generale.

Essendo $\alpha_{00} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$ si tratta di una parabola.

In questo caso la parte quadratica dell'equazione è

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = (\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y)^2$$

Detto $f(x,y)$ il primo membro dell'eq. (1)

si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 4y - 9\sqrt{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 4y - 7\sqrt{2}$$

Usando le formule del § 7.3 del testo abbiamo

$$\sqrt{2}\,(4x + 4y - 9\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,(4x + 4y - 7\sqrt{2}) = 0$$

semplificando:

$$8x + 8y - 16\sqrt{2} = 0$$

$$\boxed{x + y - 2\sqrt{2} = 0}$$

Questa è l'eq. dell'asse di simmetria della parabola. Il vertice della parabola si ottiene intersecando questo asse di simmetria con la parabola stessa:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 2y^2 - 9\sqrt{2}\,x - 7\sqrt{2}\,y + 10 = 0 \\ x + y - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Ricavando $y = -x + 2\sqrt{2}$ e sostituendo:

$$2x^2 + 4x(-x+2\sqrt{2}) + 2(-x+2\sqrt{2})^2 - 9\sqrt{2}\,x +$$

$$-7\sqrt{2}(-x+2\sqrt{2}) + 10 = 0$$

$$2x^2 - 4x^2 + 8\sqrt{2}\,x + 2(x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8) - 9\sqrt{2}\,x + 7\sqrt{2}\,x$$

$$-28 + 10 = 0$$

$$\cancel{2x^2} \cancel{-4x^2} + \cancel{8\sqrt{2}}\,x + \cancel{2x^2} - \cancel{8\sqrt{2}\,x} + 16 - 9\sqrt{2}\,x + 7\sqrt{2}\,x - 18 = 0$$

$$-2\sqrt{2}\,x - 2 = 0 \qquad \sqrt{2}\,x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e dunque } y = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Il vertice è $V\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) \simeq (-0.71, 3.54)$

Il nuovo sistema di riferimento è quindi $RC(O'x'y')$ in cui $O' = V$, asse y' è l'asse di simmetria, asse x': perpendicolare all'asse di simmetria passante per il vertice:

$x - y + k = 0$ da cui $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + k = 0$

$$-\frac{6}{2}\sqrt{2} + k = 0 \qquad \boxed{k = 3\sqrt{2}}$$

(Attenzione: c'era un errore in classe. Si era preso $k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$)

Allora
$$\begin{cases} x' = \dfrac{x + y - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\[2mm] y' = \dfrac{x - y + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Invertiamo:
(*)
$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\[2mm] y = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} + \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Sostituiamo in (1)

$$2\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 - 9\sqrt{2}\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 7\sqrt{2}\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$+ 10 = 0$$

Otteniamo $4x'^2 - 2y' = 0$

$$2x'^2 - y' = 0$$

ossia $\boxed{y' = 2x'^2}$ eq. canonica desiderata.

Il fuoco è $2 = \frac{1}{4c}$ da cui $c = \frac{1}{8}$ e quindi in $RC(O'x'y')$ il fuoco ha coordinate $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ e la direttrice ha equazione $y' = -\frac{1}{8}$. Nel vecchio riferimento abbiamo

Fuoco: $\begin{cases} x = \dfrac{0 + \frac{1}{8}}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -\dfrac{7\sqrt{2}}{16} \simeq -0.62 \\ y = \dfrac{0 - \frac{1}{8}}{\sqrt{2}} + \dfrac{5}{2}\sqrt{2} = \dfrac{39\sqrt{2}}{16} \simeq 3.45 \end{cases}$

La direttrice ha equazione $y' = -\frac{1}{8}$ cioè

$$\frac{x - y + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{8}, \quad x - y + 3\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$x - y + 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} = 0, \quad x - y + \frac{24\sqrt{2} + \sqrt{2}}{8} = 0$$

$$\boxed{x - y + \frac{25}{8}\sqrt{2} = 0}$$

Osservazione: Nell'invertire le equazioni (vedi (*) di p. 3) si poteva procedere, anche "risolvendo" il sistema rispetto a x e y:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - 2 \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} + 3 \end{cases}$$

Riscriviamo

$$\begin{cases} x' + 2 = \dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} \\ y' - 3 = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

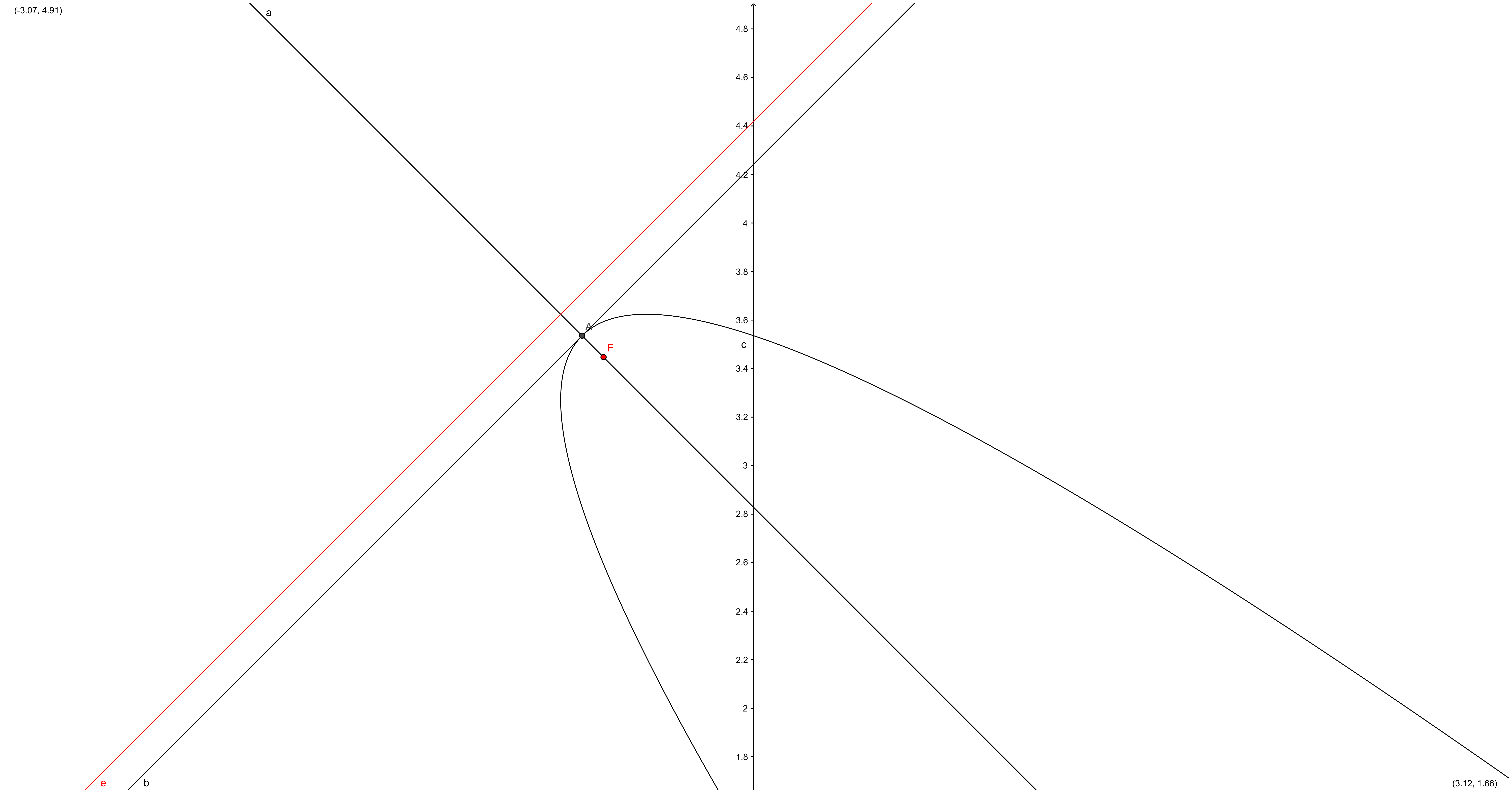
Poi sommiamo le due equazioni ottenendo

$x' + y' - 1 = \sqrt{2}\, x$ da cui $x = \dfrac{x' + y' - 1}{\sqrt{2}}$

e sottraiamo:

$x' - y' + 5 = \sqrt{2}\, y$ da cui $y = \dfrac{x' - y' + 5}{\sqrt{2}}$

che coincidono con le (*).



(-3.07, 4.91)
a
4.8
4.6
4.4
4.2
4
3.8
3.6
A
F
c
3.4
3.2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
1.8
e
b
(3.12, 1.66)