1 Esercizio

Verificare che i polinomi seguenti

$$\delta_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}$$

$$\delta_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}$$

$$\delta_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}$$

costituiscono una base ortonormale dello spazio euclideo $\mathbb{P}_2$ con il prodotto scalare definito da

$$(p(x)|q(x)) = p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$$

Soluzione. Essi sono tre polinomi di grado 2 e quindi certamente sono elementi di $\mathbb{P}_2$. Inoltre:

$$(\delta_1(x)|\delta_1(x)) = \delta_1(1)\delta_1(1) + \delta_1(2)\delta_1(2) + \delta_1(3)\delta_1(3) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$(\delta_2(x)|\delta_2(x)) = \delta_2(1)\delta_2(1) + \delta_2(2)\delta_2(2) + \delta_2(3)\delta_2(3) = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$(\delta_3(x)|\delta_3(x)) = \delta_3(1)\delta_3(1) + \delta_2(2)\delta_2(2) + \delta_3(3)\delta_3(3) = 0 + 0 + 1 = 1$$

mentre invece

$$(\delta_1(x)|\delta_2(x)) = \delta_1(1)\delta_2(1) + \delta_1(2)\delta_2(2) + \delta_1(3)\delta_2(3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(\delta_1(x)|\delta_3(x)) = \delta_1(1)\delta_3(1) + \delta_1(2)\delta_3(2) + \delta_1(3)\delta_3(3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$(\delta_2(x)|\delta_3(x)) = \delta_2(1)\delta_3(1) + \delta_2(2)\delta_3(2) + \delta_2(3)\delta_3(3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

e sono quindi, per definizione, una base ortonormale.

Scrivere il polinomio $x^2 + x + 1$ come combinazione lineare dei polinomi della base ortonormale determinata sopra.

Soluzione.

Usiamo lo sviluppo di Fourier. Osserviamo che $(p(x)|\delta_1(x)) = p(1)\delta_1(1) + p(2)\delta_1(2) + p(3)\delta_1(3) = p(1) \cdot 1 + p(2) \cdot 0 + p(3) \cdot 0 = p(1)$; analogamente $(p(x)|\delta_2(x)) = p(2)$ e $(p(x)|\delta_3(x)) = p(3)$. L'espressione richiesta è quindi

$$p(x) = p(1)\delta_1(x) + p(2)\delta_2(x) + p(3)\delta_3(x)$$

e dunque

$$x^2 + x + 1 = 3\delta_1(x) + 7\delta_2(x) + 13\delta_3(x)$$