1 Esercizio

Completiamo gli esempi 12.1.4, 12.1.11, 12.1.12 del testo scrivendo la matrice standard, cioè la matrice relativa alla base canonica o standard, dell'endomorfismo p_U di $\mathbb{R}^4$.

Soluzione.

Attenzione: si tratta della matrice dell'endomorfismo $p_U : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non di altro. Si potrebbe calcolare anche la matrice di $p_U : \mathbb{R}^4 \to U$, che però non è un endomorfismo, rispetto ad altre basi da specificare; ma non è questo l'esercizio richiesto.

Nel testo è stata calcolata una base ortonormale del sottospazio U ed, utilizzando lo sviluppo di Fourier, si sono trovate le equazioni dell'endomorfismo:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{4}(3x_1 + x_2 + x_3 - x_4) \\ y_2 = \frac{1}{4}(x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4) \\ y_3 = \frac{1}{4}(x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4) \\ y_4 = \frac{1}{4}(-x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4) \end{cases}$$

Per ottenere la matrice standard, fissiamo la base canonica $\mathcal{N} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ e calcoliamo le immagini mediante le equazioni appena scritte. Abbiamo

$$E_1 = (1,0,0,0) \mapsto (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{N}}}{\mapsto} (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4})^T$$

$$E_2 = (0,1,0,0) \mapsto (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{N}}}{\mapsto} (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}))^T$$

$$E_3 = (0,0,1,0) \mapsto (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{N}}}{\mapsto} (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})^T$$

$$E_4 = (0,0,0,1) \mapsto (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{N}}}{\mapsto} (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})^T$$

Queste quattro colonne danno la matrice standard desiderata

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Continuiamo l'esercizio, chiedendo invece di calcolare la matrice della trasformazione $T : \mathbb{R}^4 \to U$, definita da $T(\mathbf{v}) = p_U(\mathbf{v})$

Questa è una trasformazione lineare ovviamente suriettiva (epimorfismo). Per determinare una base occorre fissare, come sempre, una base nei due spazi. Nel caso precedente abbiamo fissato la base standard nei due spazi (era lo stesso spazio trattandosi di un endomorfismo). Per esempio, fissiamo di nuovo la base canonica di $\mathbb{R}^4$ nel primo spazio. Nel secondo una base canonica non esiste.

Con decisione arbitraria prendiamo la base ortonormale che abbiamo calcolato nel testo:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,-2,-1), \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,1,-2)\}.$$

Lo svolgimento dell'esercizio è analogo al precedente, solo che invece di utilizzare la applicazione $\chi_{\mathcal{N}}$ usiamo $\chi_{\mathcal{B}}$ ossia le coordinate vanno calcolate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$E_1 = (1,0,0,0) \mapsto (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} ?$$

$$E_2 = (0,1,0,0) \mapsto (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} ?$$

$$E_3 = (0,0,1,0) \mapsto (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} ?$$

$$E_4 = (0,0,0,1) \mapsto (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \overset{\chi_{\mathcal{B}}}{\mapsto} ?$$

Al posto dei punti interrogativi dobbiamo mettere le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$. Per far ciò usiamo lo sviluppo di Fourier:

$$((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + ((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + ((\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_3)\mathbf{w}_3$$

$$(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8})\mathbf{w}_1 + (\frac{1}{\sqrt{10}}(\frac{3}{4} + \frac{2}{4} - \frac{2}{4} + \frac{1}{4}))\mathbf{w}_2 + ((\frac{1}{\sqrt{10}}(\frac{6}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4})))\mathbf{w}_3$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_2 + \frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_3$$

Il primo punto interrogativo, ossia la prima colonna della matrice richiesta è quindi $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

In maniera analoga si calcolano le altre quattro colonne:

$$((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + ((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + ((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_3)\mathbf{w}_3$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_2 - \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_3$$

$$((\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + ((\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + ((\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}) \cdot \mathbf{w}_3)\mathbf{w}_3$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}_1 - \frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_2 + \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_3$$

e infine

$$((-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1+((-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2+((-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{4})\cdot\mathbf{w}_3)\mathbf{w}_3$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\mathbf{w}_1-\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_2-\frac{2}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_3$$

La matrice desiderata è quindi

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$