1 Applicazioni lineari

Un'applicazione L tra due spazi vettoriali V e W si dice lineare se soddisfa

1. $L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v_1} + \mathbf{v}_2)$ **per ogni** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$
2. $L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v})$ **per ogni** $\alpha \in \mathbb{R}$ **e** $\mathbf{v} \in V$

Osservazione 1. Se fissiamo una base di uno spazio vettoriale (di dimensione finita) V, sia essa $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ allora ogni vettore di V si scrive (in un unico modo) come $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ di conseguenza il valore $L(\mathbf{v})$ è fissato non appena siano fissati i valori $L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_n)$. Infatti

$$L(\mathbf{v}) = L(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_n L(\mathbf{v}_n)$$

Esempio 1. Le seguenti condizioni individuano completamente una applicazione lineare

1. $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$;
2. $L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ e $L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Infatti volendo calcolare $L\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = L\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$
$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\9\\11\\13\end{pmatrix}$

Osservazione 2. Moltiplicando una matrice A di ordine $m \times n$ per la colonna i-esima E_i della matrice identità di ordine n si ottiene la i-esima colonna di A. In simboli, scritta la matrice a blocchi $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, dove $A_i, i = 1, \dots n$ sono le colonne di A, si ha

$$AE_i = A_i$$

Esempio 2.

$$AE_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\\9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\10\end{pmatrix} = A_2$$

Osservazione 3. Il risultato della moltiplicazione tra una matrice A di ordine $m \times n$ ed un vettore colonna di ordine $n \times 1$ è un vettore combinazione lineare delle colonne di A. Infatti, con le stesse notazioni dell'osservazione precedente:

$$AX = (A_1, A_2, \dots, A_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

Infatti, l'Osservazione 2 è un caso particolare di questa in cui prendiamo come $X = E_i$. Questo ci dice in particolare che in questo modo, al variare di X, si ottengono tutte le possibili combinazioni lineari delle colonne di A ossia si ottiene $\mathcal{C}(A)$, lo spazio delle colonne di A.

Esercizio 1 Determinare una matrice che rappresenta l'applicazione lineare definita nell'Esempio 1. Calcolarne il nucleo e l'immagine.

<u>Soluzione.</u> Vogliamo determinare una matrice A in modo tale che calcolare $L(\mathbf{v})$ sia uguale a calcolare $A\mathbf{v}$. Deve essere una matrice di ordine 4×2 perchè l'applicazione va da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^4$. Dall'Esempio 1 e con l'Osservazione 2 abbiamo che le colonne di A devono essere precisamente $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ cioè

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il nucleo. Per definizione, $\ker L = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 | L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$. La condizione di appartenere al nucleo si esprime quindi con

$$A\mathbf{v} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta in definitiva di risolvere un SLO. Poichè la matrice A ha rango 2, per Rouché-Capelli il sistema ha una solo soluzione, necessariamente quella banale. Dunque $\ker L = \{\mathbf{0}\}$ e dunque L è iniettiva (si dice anche *monomorfismo*).

Studiamo invece l'immagine di L. Per definizione,

$$\operatorname{Im} L = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4 | \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$$

La condizione allora si traduce in $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ dove $\mathbf{w}$ è assegnato e ci si domanda se esista $\mathbf{v}$. Dall'Osservazione 3 possiamo concludere che i vettori $\mathbf{w}$ per cui $\mathbf{v}$ esiste sono quelli di $\mathcal{C}(A)$. In altre parole, $\mathcal{C}(A) = \operatorname{Im}(L)$. Ne segue, in particolare, la seguente importante conseguenza:

$$\boxed{\operatorname{rg}(A) = \dim \operatorname{Im}(L)}$$

cioè, in aggiunta ai tanti altri significati, il rango di una matrice è la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare associata.

Esercizio 2. Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che associa ad ogni vettore $\mathbf{v} = (x, y, z)$ il vettore $f(\mathbf{v}) = (x, y, -z)$. Geometricamente, il vettore trasformato è la riflessione attraverso il piano xy del vettore dato. Verificare che questa trasformazione è lineare. Calcolarne una matrice (standard) e determinare il nucleo e l'immagine.

Soluzione.

$$\begin{aligned} f[(x, y, z) + (x', y'z')] &= f[(x + x', y + y', z + z')] = (x + x', y + y', -(z + z')) \\ &= (x, y, -z) + (x', y', -z') = f(x, y, z) + f(x', y', z') \end{aligned}$$

$$f(\alpha(x, y, z)) = f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y, -\alpha z) = \alpha(x, y, -z) = \alpha f(x, y, z)$$

quindi f è un endomorfismo. Geometricamente si capisce che f è iniettiva e suriettiva ed è quindi un isomorfismo. Essa è infatti inversa di se stessa. Verifichiamo tuttavia queste proprietà mediante la matrice che ora determiniamo.

Sappiamo che la trasformazione è individuata non appena si conoscano le immagini di vettori di una base. Se prendiamo come base la base canonica, o standard, la matrice che si ottiene si dice matrice standard dell'applicazione. Dalla definizione di f si vede che $f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$,$f(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$. La matrice cercata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Essendo questa matrice quadrata e invertibile ne segue immediatamente che f è iniettiva e suriettiva.

2 Isometrie

Una trasformazione lineare da $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice **isometria** se conserva le distanze ("movimento rigido del piano") ossia se $\|\mathbf{v}\| = \|T(\mathbf{v})\|$.

Una rotazione o una riflessione sono chiaramente delle isometrie. Dimostriamo ora che queste sono tutte e sole le possibili isometrie di $\mathbb{R}^2$. Supponiamo cioè che T sia un'isometria e mostriamo che essa è una rotazione rispetto a un qualche angolo o una riflessione rispetto ad un asse opportuno.

Sia A la matrice standard associata a T. Abbiamo allora $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Posto $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ abbiamo allora

$$\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| = \| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|$$

cioè

$$x^2 + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 + c^2)x^2 + (b^2 + d^2)y^2 + 2(ab + cd)xy$$

ne segue

$$a^2 + c^2 = 1 \tag{1}$$

$$b^2 + d^2 = 1 \tag{2}$$

$$ab + cd = 0 \tag{3}$$

Queste sono proprio le condizioni che si ottengono imponendo $A^T A = I$. Infatti

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ba + dc & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dal Teorema di Binet sappiamo allora che il determinante di A vale ± 1. Distinguiamo allora i due casi:

1. Caso $\det A = 1$;
2. Caso $\det A = -1$.

Nel primo caso $\det A = 1$ ossia

$$ad - bc = 1 \tag{4}$$

Moltiplichiamo ambo i membri di (4) per c:

$$acd - bc^2 = c$$

Utilizzando (3) abbiamo $cd = -ab$ e sostituendo

$$a(-ab) - bc^2 = c$$

$$-b(a^2 + c^2) = c$$

e per la (1) segue $-b = c$.

In maniera analoga, moltiplichiamo ambo i membri di (4) per d:

$$ad^2 - bcd = d$$

Utilizzando (3) abbiamo $cd = -ab$ e sostituendo

$$ad^2 - b(-ab) = d$$

$$a(d^2 + b^2) = d$$

e per la (2) segue $a = d$. La matrice A è quindi

$$A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

Dal fatto che $\det A = a^2 + c^2 = 1$ ne deduciamo che possiamo porre $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ per un θ opportuno ossia

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

si tratta quindi di una rotazione di un angolo θ in senso antiorario (cf. Testo pag. 242)

Nel secondo caso $\det A = -1$ ossia

$$ad - bc = -11 \tag{5}$$

Moltiplichiamo ambo i membri di (4) per c:

$$acd - bc^2 = -c$$

Utilizzando (3) abbiamo $cd = -ab$ e sostituendo

$$a(-ab) - bc^2 = -c$$

$$b(a^2 + c^2) = c$$

e per la (1) segue $b = c$.

In maniera analoga, moltiplichiamo ambo i membri di (4) per d:

$$ad^2 - bcd = -d$$

Utilizzando (3) abbiamo $cd = -ab$ e sostituendo

$$ad^2 - b(-ab) = -d$$

$$a(d^2 + b^2) = -d$$

e per la (2) segue $a = -d$. La matrice A è quindi

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Dal fatto che $\det A = -a^2 - c^2 = -1$ ne deduciamo che possiamo porre $a = \cos\theta, b = \sin\theta$ per un θ opportuno ossia

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

si tratta di una riflessione rispetto ad una retta passante per l'origine, (cf. Testo pag. 243)

Esempio. Scrivere la matrice della riflessione rispetto alla retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$ nel piano cartesiano $RC(Oxy)$. Dalla formula richiamata del testo si ha la matrice:

$$\frac{1}{\ell^2 + m^2}\begin{pmatrix} \ell^2 - m^2 & 2\ell m \\ 2\ell m & m^2 - \ell^2 \end{pmatrix}$$

La retta $y = \frac{1}{2}x$ ha parametri direttori $\ell = 1, m = \frac{1}{2}$ e dunque

$$\frac{1}{5/4}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$