0.1 Qualche osservazione e precisazione a proposito di un esercizio svolto in aula

Determinare il quarto vertice D di un parallelogramma di cui $A(2,1), B(-1,2), C(3,3)$ sono vertici consecutivi.

In aula l'esercizio è stato svolto così: Visto che i vertici A, B, C sono consecutivi abbiamo imposto che $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ da cui

$$\begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ 3-y \end{pmatrix}$$

Da cui ricaviamo per D le coordinate $(6,2)$. Oppure si poteva procedere prendendo la retta per C parallela alla retta AB:

$$\frac{x-3}{-1-2} = \frac{y-3}{2-1}$$

ossia $x + 3y - 12 = 0$

Poi prendiamo la parallela per A alla retta BC:

$$\frac{x-2}{3+1} = \frac{y-1}{3-2}$$

cioè $x - 4y + 2 = 0$. Risolvendo il sistema

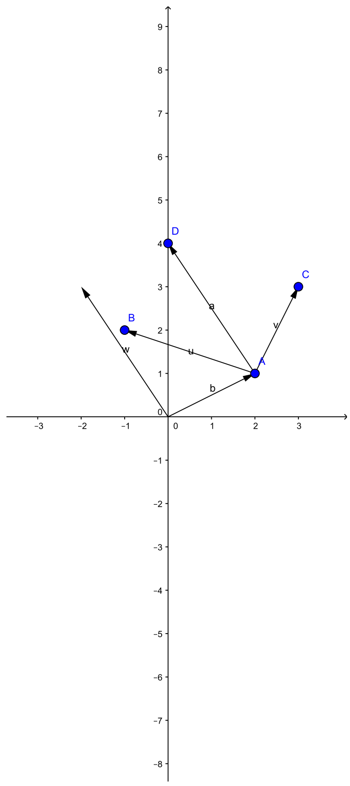
$$\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & -7 & -14 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $x = 6, y = 2$ come nel caso precedente.

Tutto questo sarebbe giusto se i punti fossero veramente consecutivi, ma ad una verifica i punti dati sono posizionati come in figura



e quindi nella soluzione data sopra occorre scambiare i ruoli di A e B.
Svolgiamo quindi di nuovo, in maniera corretta, l'esercizio.
I vertici B, A, C sono consecutivi, imponiamo che $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ da cui

$$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$$

Da cui ricaviamo per D le coordinate $(0, 4)$. Oppure si poteva procedere prendendo la retta per B parallela alla retta AC:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2}$$

ossia $2x - y + 4 = 0$

Poi prendiamo la parallela per C alla retta AB:

$$\frac{x-3}{2+1} = \frac{y-3}{1-2}$$

cioè $x + 3y - 12 = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & -7 & -28 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui $x = 0, y = 4$ come nel caso precedente.

Si potevano anche sommare i vettori $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ottenendo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Questo è il vettore libero $\overrightarrow{AD}$. Per trovare le coordinate del punto finale D occorre applicare il vettore nel punto A e quindi dobbiamo sommare al vettore $\overrightarrow{AD}$ il vettore $\overrightarrow{OA}$:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ottenendo di nuovo $(0, 4)$ come nei casi precedenti.