

Esercizio 1. Date le rette

$$r : \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 5x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

e

$$s : \begin{cases} 3x - 3y + 3z - 1 = 0 \\ 5x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

verificare se esse sono o no complanari, se sono parallele o incidenti, ed eventualmente determinare un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Soluzione.

Considero la matrice dei coefficienti e la trasformo nella sua forma a gradini ridotta:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui vediamo che il $rg(C) = 3$ e $rg(A) = 2$ con le solite notazioni. Si tratta quindi di due rette parallele (e complanari), cf. Proposizione 9.11.1 del testo. Per determinare il piano che le contiene, scegliamo tre punti: due su r e uno su s . Per esempio, $A(\frac{1}{5}, -\frac{2}{15}, 0)$ e $B(-\frac{1}{5}, \frac{7}{15}, 1)$ punti di r e $C(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{15}, 0)$ punto di s e scriviamo l'equazione del piano per questi tre punti (usiamo la formula (9.16) del testo):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{5} & \frac{7}{15} & 1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{8}{15} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$3x - 3y + 3z = 1$$

che è l'equazione desiderata.