Piano Osculatore

1 Piano osculatore

Sia γ un arco di curva e P_0 un punto nel quale γ ammette retta tangente.

Definition 1. Si dice *piano osculatore* alla curva γ nel punto P_0 il piano, se esiste, che è posizione limite del piano contenente la tangente a γ in P_0 e un altro punto P di γ, al tendere di P a P_0 su γ.

Si dimostra che se γ è un arco di curva regolare di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad , \quad t \in I$$

in cui tali funzioni sono derivabili almeno due volte e risulti, per ogni $t \in I$

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{pmatrix} = 2$$

allora esiste il piano osculatore in ogni punto $P_0 = P(t_0)$ ed ha equazione

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

Dimostrazione. Il piano per P_0 contenente la tangente a γ in P_0 ed un altro punto $P(t)$ di γ è

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x(t) - x(t_0) & y(t) - y(t_0) & z(t) - z(t_0) \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

(passa per P_0, è parallelo alla tangente e alla secante $P_0P(t)$).

Consideriamo ora la formula di Taylor del secondo ordine per ciascuna delle tre funzioni componenti:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(x''(t_0) + \omega_1(t)\right)(t - t_0)^2$$

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(y''(t_0) + \omega_2(t)\right)(t - t_0)^2$$

$$z(t) = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}\left(z''(t_0) + \omega_3(t)\right)(t - t_0)^2$$

dove $\lim\limits_{t\to t_0} \omega_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Sostituiamo ora nella (1):

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(x''(t_0) + \omega_1(t)\right)(t-t_0)^2 & y'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(y''(t_0) + \omega_2(t)\right)(t-t_0)^2 & z'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\left(z''(t_0) + \omega_3(t)\right)(t-t_0)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante lungo l'ultima riga si ha somma di due determinanti:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_0)(t-t_0) & y'(t_0)(t-t_0) & z'(t_0)(t-t_0) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ \frac{1}{2}\left(x''(t_0) + \omega_1(t)\right)(t-t_0)^2 & \frac{1}{2}\left(y''(t_0) + \omega_2(t)\right)(t-t_0)^2 & \frac{1}{2}\left(z''(t_0) + \omega_3(t)\right)(t-t_0)^2 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x'(t_0)(t-t_0) & y'(t_0)(t-t_0) & z'(t_0)(t-t_0) \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{2}(t-t_0)^2 \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ \left(x''(t_0) + \omega_1(t)\right) & \left(y''(t_0) + \omega_2(t)\right) & \left(z''(t_0) + \omega_3(t)\right) \end{vmatrix} = 0$$

Il primo determinante è nullo perché contiene due righe proporzionali (la seconda e la terza); rimane quindi

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ (x''(t_0) + \omega_1(t)) & (y''(t_0) + \omega_2(t)) & (z''(t_0) + \omega_3(t)) \end{vmatrix} = 0$$

Passando al limite per t che va a t_0 si ha la formula desiderata. □

2 Esercizi

1. Verificare che la curva $\gamma : \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^3 - 3t \\ z = t^4 - 4t \end{cases}$ non passa per $Q(0, 2, 3)$ mentre passa per $P_0(-1, -2, -3)$ in cui però non è regolare.

   Soluzione. Scriviamo il sistema

$$\begin{cases} 0 = t^2 - 2t \\ 2 = t^3 - 3t \\ 3 = t^4 - 4t \end{cases}$$

   dalla prima equazione vediamo facilmente che $t = 0$ oppure $t = 2$. Tuttavia per $t = 0$ le altre due equazioni non sono soddisfatte, e per $t = 2$ la terza equazione non è soddisfatta. Dunque γ non passa per Q.

   Se invece prendiamo il sistema

$$\begin{cases} -1 = t^2 - 2t \\ -2 = t^3 - 3t \\ -3 = t^4 - 4t \end{cases}$$

   la prima equazione può essere riscritta come $t^2-2t+1 = (t-1)^2 = 0$ che ha l'unica soluzione $t = 1$. Sostituendo $t = 1$ nelle altre due equazioni si trova che esse sono soddisfatte e quindi γ passa per P_0. Tuttavia,

$$\gamma' : \begin{cases} x = 2t^2 - 2 \\ y = 3t^2 - 3 \\ z = 4t^3 - 4 \end{cases}$$

ci dà

$$\gamma'(1) = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-3 \\ 4-4 \end{pmatrix}$$

cioè il vettore nullo, la curva non è quindi regolare (regolare a tratti).

2. Sia data la curva

$$\gamma : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = e^t \end{cases}$$

   (a) Verificare che γ è regolare;
   (b) Calcolare in $P(t)$ le componenti del versore tangente alla curva
   (c) Verificare che la tangente in $P(t)$ forma un angolo costante con l'asse z
   (d) Calcolare il piano osculatore alla curva in un suo punto generico.

Soluzioni.

   (a) Calcoliamo le derivate prime:

$$\gamma' : \begin{cases} x' = e^t(\cos t - \sin t) \\ y' = e^t(\sin t + \cos t) \\ z' = e^t \end{cases}$$

   Osserviamo che essendo la terza funzione $z = e^t$ questa non si annulla mai e quindi anche il vettore $\gamma'(t)$ non si annulla mai. Per quanto riguarda la corrispondenza biunivoca: se supponiamo $P(t_1) = P(t_2)$ deve necessariamente aversi $e^{t_1} = e^{t_2}$ e quindi $t_1 = t_2$. Dunque la curva è regolare.

   (b) Calcoliamo la norma del vettore tangente $\gamma'(t)$:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} =$$

$$= e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t + 1}$$

$$= e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t \cancel{-2\sin t\cos t} + \sin^2 t + \cos^2 t + \cancel{2\sin t\cos t} + 1}$$

$$e^t\sqrt{3}$$

Osserviamo incidentalmente che questo calcolo mostra di nuovo che il vettore tangente non è mai nullo.

Il versore tangente si ottiene dunque normalizzando:

$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Per calcolare l'angolo tra due vettori usiamo la formula

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \tag{2}$$

La applichiamo al versore tangente appena calcolato e al versore direzione dell'asse z, cioè $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Essendo due versori, il denominatore della formula (2) è 1 e il prodotto scalare è $\frac{1}{\sqrt{3}}$ che è evidentemente indipendente da t.

(d) Per quanto riguarda il piano osculatore calcoliamo le derivate seconde:

$$\gamma'' : \begin{cases} x'' = -2e^t\sin t \\ y'' = 2e^t\cos t \\ z'' = e^t \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{vmatrix} xe^t\cos t & y - e^t\sin t & z - e^t \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\sin t + \cos t) & e^t \\ -2e^t\sin t & 2e^t\cos t & e^t \end{vmatrix} = 0$$

$$e^{2t}\begin{vmatrix} xe^t\cos t & y - e^t\sin t & z - e^t \\ \cos t - \sin t & \sin t + \cos t & 1 \\ -2\sin t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Essendo e^{2t} sempre non nullo, lo possiamo semplificare e ottenere l'equazione del piano osculatore sviluppando il determinante lingo la prima riga. Otteniamo

$$(x-e^t\cos t)(\sin t-\cos t)-(y-e^t\sin t)(\cos t+\sin t)+(z-e^t)2=0$$

da cui semplificando

$$\begin{aligned} &x(\sin t-\cos t)-y(\cos t+\sin t)+2z \\ &-e^t\sin t\cos t+e^t\cos^2 t+e^t\sin\cos t+e^t\sin^2 t-2e^t=0 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &x(\sin t-\cos t)-y(\cos t+\sin t)+2z \\ &\cancel{-e^t\sin t\cos t}+e^t\cos^2 t+\cancel{e^t\sin\cos t}+e^t\sin^2 t-2e^t=0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\boxed{x(\sin t-\cos t)-y(\cos t+\sin t)+2z-e^t=0} \tag{5}$$