# Lista di esercizi
# 11 maggio 2016

1. Determinare il numero di sequenze binarie di lunghezza $n$ che contengano almeno una coppia di 0 consecutivi.

2. I biglietti di autobus di una certa città hanno dei numeri di serie di sei cifre. Secondo una ordinanza locale, un biglietto in cui la somma delle prime tre cifre è uguale alla somma delle ultime tre cifre dà diritto ad un secondo biglietto gratis. Chiamiamo *fortunato* un biglietto con questa caratteristica. Per esempio, il biglietto numero 123060 è fortunato mentre 123456 no.

   **Domanda 1** Quanti biglietti fortunati possibili esistono?

   **Domanda 2** Quanti biglietti fortunati esistono se i numeri di serie dei biglietti sono di 8 cifre e si dice fortunato un biglietto in cui la somma delle prime quattro cifre è uguale a quello delle ultime quattro?

   **Domanda 3** Quanti biglietti fortunati se il numero delle cifre è un qualunque numero pari $2n$?

3. Determinare la funzione generatrice delle successioni seguenti

   (a) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

   (b) $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, \ldots$

   (c) $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

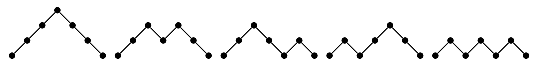
4. Dimostrare che scelto comunque un intero positivo $k$, allora ogni intero positivo $n$ può essere scritto in uno ed un solo modo nella forma

$$n = \binom{b_1}{1} + \binom{b_2}{2} + \cdots + \binom{b_k}{k}, 0 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_k$$

   Per $k = 1$ è ovvio essendo $n = \binom{n}{1}$, $n \geq 0$. Per esempio se $k = 2$ e $n = 5$ allora $5 = \binom{2}{1} + \binom{3}{2}$, se $k = 3, n = 8$ abbiamo $8 = \binom{1}{1} + \binom{3}{2} + \binom{4}{3}$ e se $k = 4, n = 10$, $10 = \binom{0}{1} + \binom{2}{2} + \binom{4}{3} + \binom{5}{4}$

5. Se $A(x)$ è la funzione generatrice di una data successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ esprimere in termini di $A$ la funzione generatrice di $a_0 + a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$ In particolare dare il risultato se la successione è $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5,$.

6. (Cammini su reticoli). Quanti possibili cammini esistono che, partendo dall'origine del piano cartesiano e muovendosi di un passo alla volta in due possibili maniere: a Nord-Est (secondo il vettore $(1, 1$, oppure verso Sud-Est, secondo il vettore $(1, -1)$ tornano poi sull'asse delle $x$ dopo $2n$ passi? Per esempio i seguenti sono cammini con 6 passi:



7. Se $A$ è un insieme con $n = 15$ elementi e $k = 2$ verificare che ci sono 15 modi di ripartire i 5 elementi di $A$ in due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti. Per esempio (con scrittura semplificata) $12345 = 12 + 345$ è un modo di indicare $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}$.

8. Verificare se le seguenti liste possono essere liste di gradi di un grafo

   (a) $2, 2, 2, 3$

   (b) $1, 2, 2, 3, 4$

   (c) $2, 2, 4, 4, 4$

   (d) $1, 2, 3, 4$

9. Se $G = (V, E)$ è un grafo, il complementare $\overline{G}$ di $G$ è il grafo i cui vertici sono gli stessi di $G$ e gli spigoli uniscono due vertici se e solo se essi non sono adiacenti in $G$. Se $G$ ha $n$ vertici di gradi $d_1, d_2, \ldots, d_n$, quali sono i gradi in $\overline{G}$?

10. Quanti grafi differenti con 7 vertici e regolari di grado 4 esistono? (Suggerimento: può essere utile considerare il grafo complementare. )

11. Dimostrare che se $G$ è un grafo con almeno due vertici allora $G$ possiede almeno due vertici con lo stesso grado.

12. Descrivere, se possibile, un circuito hamiltoniano nel cubo $Q_3$.

13. Qual è il numero cromatico del cubo $Q_3$?

14. Sia $G$ un grafo bipartito con un numero dispari di vertici. Dimostrare che $G$ non può avere un ciclo hamiltoniano.

15. Dire se i seguenti grafi sono isomorfi o meno.