1. Sia S l'insieme delle matrici di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}_3$ della forma

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

   Verificare che S è un gruppo abeliano rispetto alla solita somma tra matrici. $S - \{0\}$ è un gruppo abeliano rispetto al solito prodotto righe per colonne. Vale la proprietà distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac$$

   qualunque siano $a, b, c \in S$. Diciamo allora che S è un anello. Si dice allora che S è un anello commutativo (cioè il prodotto $ab = ba$ per ogni $a, b \in S$).

2. Verificare che se nell'esercizio precedente cambiamo solo il campo degli scalari in $\mathbb{Z}_5$ invece di $\mathbb{Z}_3$, allora $S - \{0\}$ non è un gruppo abeliano rispetto al solito prodotto righe per colonne.

3. Calcolare la matrice inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

   dove i coefficienti si intendono in $\mathbb{Z}_5$.

4. Si consideri un insieme S analogo a quello del primo esercizio in cui però i coefficienti sono reali. Ovviamente abbiamo in tal caso un insieme infinito. Verificare che questo insieme S con questa struttura è isomorfo al campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.