1. Dividere il polinomio $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5$ per $2x^2 + 3x + 4$ come polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$.

   Soluzione.

$$\begin{array}{ccccc|ccc} 3x^4 & +2x^3 & +x^2 & +0x & +5 & 2x^2 & +3x & +4 \\ \cline{6-8} 3x^4 & +x^3 & +6x^2 & 0 & 0 & 5x^2 & +4x & +2 \\ \cline{1-5} & x^3 & +2x^2 & +0x & +5 & & & \\ & x^3 & +5x^2 & +2x & 0 & & & \\ \cline{2-5} & & 4x^2 & +5x & +5 & & & \\ & & 4x^2 & +6x & +1 & & & \\ \cline{3-5} & & & 6x & +4 & & & \end{array}$$

   e si può in effetti verificare che

$$3x^4 + 2x^3 + x^2 + 5 = (2x^2 + 3x + 4)(5x^2 + 4x + 2) + 6x + 4$$

2. Ridurre a gradini la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   dove i coefficienti sono presi in $\mathbb{Z}_7$.

3. Ridurre a gradini la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   dove i coefficienti sono presi in $\mathbb{Z}_5$.

4. Verificare che moltiplicando un numero complesso $w = a+ib$ per un fissato numero complesso $z = \cos\theta + i\sin\theta$ si ottiene lo "stesso risultato" della moltiplicazione del vettore (a, b) per la matrice ortogonale

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

5. Scrivere $(5^2 + 3^2)(2^2 + 7^2)$ come somma di due quadrati.

6. Verificare che benché $39 = (0^2 + 2^2 + 3^2)(1^2 + 1^2 + 1^2)$, non è possibile scrivere 39 come somma di tre quadrati.