# Ottobre 2021

Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. **a)** Determinare il piano per $A = (2, -5, 3)$ e $B = (-1, 4, -2)$ e ortogonale al piano $2x - y + z = 2$

   **b)** Determinare il piano contenente $r : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ e parallelo a $s : \begin{cases} x = 2u \\ y = -u + 1 \\ z = u \end{cases}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che $(1, 3, 1, 0)$ e $(0, 2, 0, 1)$ siano autovettori associati a 0, $(-1, 0, 0, 1)$ un autovettore associato a 2, $(1, 1, 0, 0)$ un autovettore associato a -3. Trovare base e dimensione di $Imf$ e $Kerf$. Trovare $f^{-1}(0, 1, 0, 1)$.

3. Siano $V = \langle(1, 0, 1, -1), (2, 1, 0, 1)\rangle$ e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ sottospazi di $\mathbb{R}^4$. Trovare una base e la dimensione di $U$ e di $V \cap U$.

Domande:

1. Sia $U$ sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k$. Enunciare la definizione di $U^\perp$ e dire che dimensione ha.

2. Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ sistema lineare con $A$ matrice $3 \times 4$. Sapendo che $\rho(A) = 3$, si può dire se il sistema è indeterminato, indeterminato o incompatibile?

3. Sia $S_1$ un insieme di vettori di $\mathbb{R}^3$ a due a due ortogonali e $S_2 = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$, con $v_1, v_2$ autovettori associati alla matrice $A$, con $v_1$ autovettore associato a 0, $v_2$ associato a 1. Per ognuno dei due insiemi, dire se sono sempre indipendenti (e perch``e) o, se è possibile, trovarne un esempio dipendente.

4. Sia $A$ una matrice $3 \times 3$ di rango 2. Cosa si può dire su $\rho(A^2)$ e $\rho(-A)$?

5. Se $A$ è diagonalizzabile, $3A$ lo è? Perchè?