12 Febbraio 2024

Svolgere la seguente prova in 2 ore e 30 minuti. Esporre lo svolgimento di ogni esercizio e non solo il risultato. Le risposte non giustificate non saranno considerate valide.

1. **a)** Determinare la retta passante per $P = (1, 2, 3)$, perpendicolare a $r : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 1 - h \\ z = 1 \end{cases}$ e complanare con $s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases}$.

   b) Classificare la conica di equazione $\lambda x^2 + \lambda xy - y^2 - y - \lambda = 0$ al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. **a)** Sia $V = \langle (1, 3, 0, 1), (0, 0, -1, 1), (1, 3, -2, 3) \rangle$ e $U = \langle (1, -1, 0, 1), (2, 0, 0, 3) \rangle$. Determinare la dimensione ed una base per $U \cap V$.

   b) Determinare la dimensione ed una base per $U \leq \mathbb{R}_3[x]$, dove $U = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p'(0) = 0\}$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, trovare una matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione lineare tale che $(0, 1, 1)$ è autovettore con autovalore associato $\lambda = 1$, $(1, 0, 2)$ è nel nucleo, e $f(0, 0, 1) = (2, 4, 1)$. Trovare $f(1, -1, 0)$ e $f^{-1}(2, 1, -2)$.

Domande:

- Enunciare le proprietà comuni di matrici simili.
- Data la base $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, trovare le componenti di $(2, 4, 1)$ rispetto a tale base.
- Un sistema del tipo $A\underline{x} = \underline{b}$, con A matrice 3×4 con rango 3 e $\underline{b}$ generico vettore di $\mathbb{R}^3$, può essere determinato, indeterminato o incompatibile?