Applicazioni lineari

Esercizio1:
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $L(1,0,0) = (1,1)$, $L(0,1,0) = (3,0)$, $L(0,0,1) = (4,-7)$.

a) Calcolare $L(x_1, x_2, x_3)$.

b) Calcolare $L(1,3,8)$.

Esercizio2:
Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $L(1,2) = (-1,0)$, $L(2,1) = (0,3)$. Determinare $L(x_1, x_2)$.

Esercizio3:
Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che $L(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -8x_1 + 4x_2)$.

a) Quali tra i vettori: $\{(1,-4),(5,0)\}$ appartiene a ImL?

b) Quali tra i vettori: $\{(5,10),(3,2)\}$ appartiene a $KerL$?

c) Calcolare le dimensioni di ImL e $KerL$.

Esercizio4:
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $L(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - 2x_2, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$. Dimostrare che L è invertibile e determinare $L^{-1}(x_1, x_2, x_3)$.

Esercizio5:
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $L(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Determinare una base e la dimensione di ImL e $KerL$.

Esercizio6:
Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4)$. Determinare una base e la dimensione di ImL e $KerL$.
Determinare una base e la dimensione di ImL e $KerL$.

Esercizio7:
Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $L(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
Determinare $L^{-1}(0,5,1)$ e $L^{-1}(1,5,1)$.

Soluzioni:

1) $L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 - 7x_3)$, dunque $L(1, 3, 8) = (42, -55)$.

2) $L(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2, 2x_1 - x_2)$.

3) $\dim ImL = KerL = 1$. Dell'insieme $\{(1, -4), (5, 0)\}$, solo il primo appartiene a ImL; dell'insieme $\{(5, 10), (3, 2)\}$ solo $(5, 10) \in KerL$.

4) $L^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{3}, \frac{x_1-3x_2}{6}, \frac{5x_1-9x_2-6x_3}{12})$.

5) $\dim ImL = 1$ e $\dim KerL = 2$.

6) $\dim ImL = 3$ e $\dim KerL = 1$.

7) $L^{-1}(0, 5, 1) = (1, 1, 0)$, $L^{-1}(1, 5, 1) = (1, 0, \frac{3}{5})$.